AUTOUR DE LA DÉCOMPOSITION DES ALGÈBRES D'EXPOSANT 2 SUR LES EXTENSIONS MULTIQUADRATIQUES

Demba Barry, Ahmed Laghribi

AUTOUR DE LA DÉCOMPOSITION DES ALGÈBRES D'EXPOSANT 2 SUR LES EXTENSIONS MULTIQUADRATIQUES

DEMBA BARRY ET AHMED LAGHRIBI

RÉSUMÉ. Pour les algèbres simples centrales d'exposant 2 sur des corps de caractéristique 2 et de 2-dimension cohomologique égale à 2, nous étudions la notion de décomposition adaptée à certaines extensions multiquadratiques du centre. Les résultats obtenus étendent plusieurs propriétés remarquables aux extensions multiquadratiques de degré de séparabilité au plus 4. Nous étendons aussi à la caractéristique 2 un résultat de Elman-Lam-Tignol-Wadsworth en construisant une algèbre d'exposant 2 et de degré 8 contenant une extension triquadratique séparable mais qui n'admet aucune décomposition adaptée à cette extension. Comme application nous donnons une preuve élémentaire de la non excellence des extensions biquadratiques séparables.

Mots clés: Algèbre simple centrale, forme quadratique, extension multiquadratique, excellence, dimension cohomologique.

MSC: 11E08, 11E81, 16K20, 13N05.

1. INTRODUCTION

Soit F un corps commutatif. Une algèbre de quaternions sur F est une algèbre de la forme

$$[\alpha, \beta) = F[i, j : i^2 + i = \alpha, j^2 = \beta, jij^{-1} = i + 1]$$

pour certains $\alpha \in F$ et $\beta \in F^\times := F \setminus \{0\}$ si la caractéristique $\mathrm{car}(F)$ de F est 2, et

$$(\alpha, \beta) = F[i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij = -ji]$$

pour certains $\alpha, \beta \in F^\times$ si $\mathrm{car}(F) \neq 2$.

Soit A une F-algèbre simple centrale d'exposant 2. L'algèbre est dite *décomposable* si $A \simeq A_1 \otimes A_2$, où A_1 et A_2 sont deux algèbres simples centrales sur F et toutes les deux non isomorphes à F. On dit que A est *totalement décomposable* si elle est isomorphe à un produit tensoriel d'algèbres de quaternions sur F. Soient $K_1, \ldots, K_r$ des extensions quadratiques de F contenues dans A telles que $K = K_1 \otimes \cdots \otimes K_r$ soit un corps. On dira que A admet une *décomposition adaptée* à K s'il existe des algèbres de quaternions $Q_1, \ldots, Q_r$, avec $K_i \subset Q_i$, telles que $A \simeq Q_1 \otimes \cdots \otimes Q_r \otimes A'$ pour une certaine sous-algèbre A'. Dans ce papier, nous nous intéressons à la question de décomposition adaptée dans le cas où la caractéristique de F est 2 et la 2-dimension cohomologique $\mathrm{cd}_2(F)$ de F est égale à 2.

Notons que la question de décomposition des algèbres simples centrales dépend de la dimension cohomologique du corps de base. Si $\mathrm{cd}_2(F) > 2$, des exemples d'algèbres indécomposables d'exposant 2 existent (voir par exemple [1] si $\mathrm{car}(F) \neq 2$, et [11] si $\mathrm{car}(F) = 2$). En plus, soient A une F-algèbre simple centrale totalement décomposable de degré au moins 8 et K/F une extension quadratique séparable contenue dans A. Il est connu que K n'est pas en général dans une sous-algèbre de quaternions de A (voir [9, Corollary 4.5] si $\mathrm{car}(F) \neq 2$, et [11, Example 3.8] si $\mathrm{car}(F) = 2$).

En revanche, supposons $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$ et soit A une F-algèbre simple centrale d'exposant 2 et de degré 2^n ($n \geq 2$). Il est connu que A est totalement décomposable, voir [16, Théorème 3] si $\mathrm{car}(F) \neq 2$ et [10, Theorem 4.1] si $\mathrm{car}(F) = 2$. En outre, soit K/F une extension séparable quadratique ou biquadratique contenue dans A. Il est montré dans [8, Theorem 3.3], si $\mathrm{car}(F) \neq 2$, et [10, Theorem 4.2], si $\mathrm{car}(F) = 2$, que A admet une décomposition adaptée à K. Ce dernier résultat n'est plus vrai pour les extensions triquadratiques. En effet, dans [13, Remark 5.8] il est construit en caractéristique différente de 2 une algèbre A de degré 8 et d'exposant 2 de centre F, avec $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$, contenant une

---

Date: 08 avril, 2022.

Le premier auteur remercie Université d'Artois pour son financement et son hospitalité (en 2018) durant une partie de ce travail.

extension triquadratique M de F telle que A n'admette aucune décomposition adaptée à M. Dans cet article, nous étendons cet exemple à la caractéristique 2.

Dans tout le reste de cet article, nous supposons que le corps de base F est de caractéristique 2. Notre but est de prouver le résultat suivant:

Théorème 1. *Supposons que* $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$. *Soint A une F-algèbre centrale à division d'exposant* 2 *et de degré* 2^n *(*$n \geq 2$*). Soit K une extension multiquadratique de F. Supposons qu'on ait l'une des conditions suivantes qui s'excluent mutuellement:*
(1) K est de degré de séparabilité ≤ 2 *avec* $[K : F] = 2^k \leq 2^n$ *et* $\mathrm{ind}A_K = 2^{n-k}$.
(2) K est de degré de séparabilité 4 *telle que* $[K : F] = 2^n$ *et A_K soit déployée.*
(3) K est une extension triquadratique de degré de séparabilité 4, $n \geq 4$ *et* $\mathrm{ind}A_K = 2^{n-3}$.
Alors, A admet une décomposition adaptée à K.

Cependant on montre que la décomposition adaptée n'est plus vraie pour les extensions multiquadratiques de degré de séparabilité 8:

Proposition 1. *Il existe un corps F de caractéristique* 2 *vérifiant* $\mathrm{cd}_2(F) = 2$, *une F-algèbre A simple centrale de degré* 8 *et d'exposant* 2 *qui n'est pas à division, une extension K/F triquadratique séparable tel que A_K soit déployée mais A n'admette pas de décomposition adaptée à K.*

La preuve du théorème 1 est basée, d'une part sur les articles [5, 6] donnant les noyaux de Witt des extensions multiquadratiques de F de degré de séparabilité au plus 4, et d'autre part sur la propriété d'excellence de certaines extensions de F pour les formes de I_q^2F. Ce théorème va au-delà de la décomposition adaptée pour les extensions biquadratiques établie dans [10, Theorem 4.2]. Noter que dans le cas particulier où K est purement inséparable, quelques résultats (indépendants de la dimension cohomologique de F) de décomposition adaptée ont été obtenus par Mammone et Moresi [20, théorèmes 4 et 5]. Quant à la proposition 1, elle donne l'analogue en caractéristique 2 d'un résultat de Elman-Lam-Tignol-Wadsworth [13, Remark 5.8]. Notre méthode est spécifique à la caractéristique 2 et fait appel à un résultat sur les formes différentielles [4] et elle est aussi basée sur une adaptation de certains arguments de Leep et Smith [18]. Comme application, nous utilisons la proposition 1 pour construire un exemple élémentaire de la non excellence des extensions biquadratiques séparables.

2. Quelques rappels

Pour plus de détails sur les notions utilisées dans cet article on renvoie à [12]. Rappelons qu'une F-forme quadratique φ s'écrit à isométrie près:

$$\varphi \simeq [a_1, b_1] \perp \cdots \perp [a_r, b_r] \perp \langle c_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle c_s \rangle \,,$$

où $[a, b]$ (*resp.* $\langle c \rangle$) désigne la forme quadratique $ax^2 + xy + by^2$ (*resp.* la forme quadratique cx^2). La forme φ est dite singulière (*resp.* non singulière) si $s > 0$ (*resp.* $s = 0$).

Pour $a, b, c \in F$ avec $c \neq 0$, on note $[a; c; b]$ la forme quadratique $ax^2 + cxy + by^2$. Rappelons que $[a; c; b]$ est isométrique à $[a, c^{-2}b]$.

Une forme quadratique φ d'espace sous-jacent V est dite isotrope s'il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(v) = 0$. Sinon, φ est dite anisotrope. La forme φ se décompose de manière unique à isométrie près comme suit:

$$\varphi \simeq i \times [0, 0] \perp j \times \langle 0 \rangle \perp \varphi_{an},$$

où φ_{an} est une forme quadratique anisotrope, qu'on appelle la partie anisotroipe de φ. L'entier i s'appelle l'indice de Witt de φ, on le note $i_W(\varphi)$.

Pour tous $a_1, \cdots, a_n \in F^\times$, on désigne par $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle_b$ la forme bilinéaire diagonale donnée par:

$$((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i.$$

Dans cet article le terme "forme bilinéaire" signifie forme bilinéaire symétrique régulière. On note $W_q(F)$ (*resp.* $W(F)$) le groupe de Witt des F-formes quadratiques non singulières (*resp.* l'anneau de Witt des F-formes bilinéaires). Le groupe $W_q(F)$ est muni d'une action de $W(F)$-module induite de façon naturelle par le produit tensoriel: $B \otimes \varphi(v \otimes v') = B(v, v)\varphi(v')$ pour $v \in V$ et $v' \in V'$, où B est une forme bilinéaire d'espace sous-jacent V et φ est une forme quadratique non singulière d'espace sous-jacent V' [7]. Cette action induit une filtration sur $W_q(F)$ par les sous-modules $(I_q^nF)_{n\geq 1}$ comme suit: $I_q^1F = W_q(F)$ et pour $n \geq 2$ on prend $I_q^nF = I^{n-1}F \otimes W_q(F)$, où I^kF est la k-ième puissance de l'idéal fondamental IF de $W(F)$ formé des F-formes bilinéaires de dimension paire (on prend $I^0F = W(F)$). Le sous-module I_q^nF est additivement engendré par les n-formes quadratiques de Pfister $\langle\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle\rangle_b \otimes [1, b]$, où $\langle\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle\rangle_b$ est la $(n-1)$-forme bilinéaire de Pfister $\langle 1, a_1\rangle_b \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_{n-1}\rangle_b$. Soit $\overline{I_q^n}F$ (*resp.* $\overline{I^n}F$) le quotient $I_q^nF/I_q^{n+1}F$ (*resp.* le quotient $I^nF/I^{n+1}F$) pour tout entier $n \geq 1$.

Soient φ et ψ deux formes quadratiques d'espaces sous-jacents V et W, respectivement. On dit que φ est dominée par ψ, qu'on note $\varphi \prec \psi$, s'il existe une injection F-linéaire $\sigma : V \longrightarrow W$ vérifiant $\psi(\sigma(v)) = \varphi(v)$ pour tout $v \in V$.

Une forme quadratique φ est dite une voisine de Pfister s'il existe une forme de Pfister π telle que $2\dim\varphi > \dim\pi$ et $a\varphi \prec \pi$ pour un certain $a \in F^\times$. Dans ce cas, π est unique et φ est isotrope si et seulement si π est isotrope.

Pour tout entier $m \geq 1$, soit $\Omega_F^m = \wedge^m\Omega_F^1$ l'espace des m-formes différentielles sur F, où Ω_F^1 est le F-espace vectoriel engendré par les symboles dx vérifiant les relations: $d(x+y) = dx + dy$ et $d(xy) = xdy + ydx$ pour tous $x, y \in F$. On pose $\Omega_F^0 = F$ et $\Omega_F^k = 0$ si $k < 0$. L'application d'Artin-Schreier classique $\wp : F \longrightarrow F$, $x \mapsto x^2 - x$, s'étend en l'opérateur d'Artin-Schreier $\wp : \Omega_F^m \longrightarrow \Omega_F^m/d\Omega_F^{m-1}$ donné par:

$$\sum_{finie} c_i \frac{da_{i_1}}{a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{i_m}}{a_{i_m}} \mapsto \overline{\sum_{finie} \wp(c_i) \frac{da_{i_1}}{a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{da_{i_m}}{a_{i_m}}},$$

où $d : \Omega_F^{m-1} \longrightarrow \Omega_F^m$ est l'opérateur différentiel donné par:

$$d(xda_1 \wedge \cdots \wedge da_{m-1}) = dx \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_{m-1}.$$

On note $\nu_F(m)$ et $H_2^{m+1}(F)$ le noyau et le conoyau de $\wp$, respectivement. Un célèbre résultat de Kato [17] donne le lien entre les formes quadratiques (formes bilinéaires) et les formes différentiells comme suit:

$$\begin{array}{rcl} e_n : \overline{I}_q^{n+1}F & \to & H_2^{n+1}(F) \\ \overline{\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle_b \otimes [1, b]} & \mapsto & \overline{b\dfrac{da_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \dfrac{da_n}{a_n}}. \end{array} \tag{2.1}$$

$$\begin{array}{rcl} f_n : \overline{I}^nF & \to & \nu_F(n) \\ \overline{\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle_b} & \mapsto & \dfrac{da_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \dfrac{da_n}{a_n}. \end{array} \tag{2.2}$$

En particulier, de l'isomorphisme (2.2), on déduit que $\nu_F(n)$ est additivement engendré par les symboles logarithmiques $\frac{da_1}{a_1} \wedge \ldots \wedge \frac{da_n}{a_n}$.

On sait par [3, (5.12)] que $H_2^{n+1}(F) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(F_s/F), \nu_{F_s}(n))$, où F_s est la clôture séparable de F. Dans [12, Appendix 101] ce groupe est noté $H^{n+1,n}(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. La 2-dimension cohomologique $\mathrm{cd}_2(F)$ de F est le plus petit entier tel que pour toute extension finie L/F et tout entier $n \geq \mathrm{cd}_2(F)$, on ait $H^{n+1,n}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, ce qui équivaut à $\overline{I_q^{n+1}}L = 0$ par l'isomorphisme (2.1). Cela donne par le Hauptsatz d'Arason-Pfister $I_q^{n+1}L = 0$.

Pour toute forme φ non singulière de dimension $2m$, on note $\Delta(\varphi)$ et $C(\varphi)$ son invariant d'Arf et son algèbre de Clifford. Plus explicitement, si $\varphi \simeq a_1[1, b_1] \perp \cdots \perp a_m[1, b_m]$, alors $\Delta(\varphi) = \sum_{i=1}^m b_i + \wp(F) \in F/\wp(F)$ et $C(\varphi) \simeq \otimes_{i=1}^m [b_i, a_i)$. En particulier, $C(\varphi)$ est une F-algèbre simple centrale d'exposant 2 et de degré 2^m. Si de plus $\varphi \in I_q^2F$, alors $C(\varphi) \simeq M_2(D_\varphi)$, où D_φ est un produit tensoriel de $m-1$ algèbres de quaternions.

On note $\mathrm{Br}(F)$ le groupe de Brauer de F. Pour une F-algèbre simple centrale A, l'entier $\sqrt{\dim_F A}$ s'appelle le degré de A et on le note $\deg A$. L'indice de A est le degré de l'algèbre à division Brauer-équivalente à A, on le note $\mathrm{ind}A$.

L'hypothèse $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$ qui nous intéresse dans cet article permet d'avoir des informations très précises concernant les F-algèbres simples centrales d'exposant 2:

Théorème 2. *([10, Theorem 4.1]) Supposons que $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$. Pour toute F-forme quadratique $\varphi \in I_q^2F$, l'algèbre D_φ est à division si et seulement si φ est anisotrope. De plus, toute F-algèbre simple centrale d'exposant 2 et de degré 2^m est isomorphe à une F-algèbre D_φ pour une certaine F-forme quadratique $\varphi \in I_q^2F$ de dimension $2m+2$.*

On obtient le corollaire suivant:

Corollaire 1. *Supposons que $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$ et soit $\varphi \in I_q^2F$. Si $\mathrm{ind}D_\varphi = 2^l$, alors $\dim \varphi_{an} = 2l+2$.*

Preuve. Posons $\dim \varphi = 2m+2$. On sait que $C(\varphi) \simeq M_2(D_\varphi)$ avec D_φ un produit de m algèbres de quaternions, donc $\deg D_\varphi = 2^m$. Posons $\mathrm{ind}D_\varphi = 2^l$. Alors, $D_\varphi \simeq M_{2^{m-l}}(A)$ pour une F-algèbre centrale à division A de degré 2^l. Par le théorème précédent, il existe φ' une F-forme quadratique anisotrope de dimension $2l+2$ telle que $C(\varphi') \simeq M_2(A)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} C(\varphi) &\simeq M_2(D_\varphi) \\ &\simeq M_{2^{m-l}}(M_2(A)) \\ &\simeq M_{2^{m-l}}(C(\varphi')) \\ &\simeq C((m-l)\times[0,0] \perp \varphi'). \end{aligned}$$

Par un résultat de Sah [23], on a $\varphi \perp -\varphi' \in I_q^3F$. Comme $I_q^3F = 0$ (car $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$), on déduit que φ est Witt-équivalente à φ', ce qui implique $\varphi_{an} \simeq \varphi'$ est de dimension $2l+2$. □

On finit cette section par rappeler la définition des formes résiduelles d'une forme quadratique sur un corps $\mathcal{F}$ Hensélien pour une valuation discrète. Soient A l'anneau de la valuation de $\mathcal{F}$, π une uniformisante et $\kappa = A/\pi A$ le corps résiduel. Soit θ une forme quadratique sur $\mathcal{F}$ anisotrope (éventuellement singulière) d'espace sous-jacent V. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on associe l'ensemble

$$V_i = \{v \in V \mid \theta(v) \in \pi^i A\},$$

c'est un A-module d'après [21, page 342]. On obtient les κ-formes quadratiques $\overline{\theta_0}$ et $\overline{\theta_1}$ définies par:

$$\begin{array}{rccc} \overline{\theta_i}: & V_i/V_{i+1} & \longrightarrow & \kappa \\ & v+V_{i+1} & \mapsto & \overline{\pi^{-i}\theta(v)}. \end{array}$$

La forme $\overline{\theta_0}$ (*resp.* $\overline{\theta_1}$) est appelée la première forme résiduelle de θ (*resp.* la seconde forme résiduelle de θ). À noter que lorsque θ est non singulière, on a $\dim \theta = \dim \overline{\theta_0} + \dim \overline{\theta_1}$ [21, Theorem 1].

Soient $u, v \in \mathcal{F}$ des unités et $\epsilon \in \mathbb{Z}$ tels que la forme $\lambda := [u, \pi^\epsilon v]$ soit anisotrope. Par l'inégalité de Schwarz [21, (4)], [24, Lemma 2.2], on a nécessairement $\epsilon \leq 0$. Voici quelques cas de calcul des formes résiduelles de λ:

(A) Si $\epsilon = 0$, alors la première forme résiduelle est $[\overline{u}, \overline{v}]$ et la seconde forme résiduelle est 0.

(B) Si ϵ est impair, alors la première forme résiduelle est $\langle \overline{u} \rangle$ et la seconde forme résiduelle est $\langle \overline{v} \rangle$.

(C) Si ϵ est pair non nul, alors $\lambda \simeq [u; \pi^{\frac{-\epsilon}{2}}; v]$. Si la forme $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$ est anisotrope, alors la première forme résiduelle de λ est $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$, et la seconde forme résiduelle est 0.

On renvoie à [21, Section 3] pour un algorithme de calcul des formes résiduelles de toute $\mathcal{F}$-forme quadratique anisotrope.

3. Résultats préliminaires

Rappelons qu'une extension K/F est dite *excellente* si pour toute F-forme quadratique anisotrope φ, il existe une F-forme quadratique ψ tel que $(\varphi_K)_{an} \simeq \psi_K$.

On dit que K/F est excellente pour les formes de I_q^mF si pour toute forme anisotrope $\varphi \in I_q^mF$, il existe une forme $\psi \in I_q^mF$ telle que $(\varphi_K)_{an} \simeq \psi_K$. On note $\mathcal{E}_m(F)$ l'ensemble des extensions de F qui sont excellentes pour les formes de I_q^mF.

Dans cet article on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}_2(F)$ qui est lié au problème de décomposabilité des algèbres simples centrales d'exposant 2. À ce propos, on donne l'exemple suivant.

Exemple 1. *(1) Toute extension K/F excellente appartient à $\mathcal{E}_2(F)$.*
(2) Toute extension K/F quadratique séparable, ou multiquadratique purement inséparable appartient à $\mathcal{E}_2(F)$.

Preuve. (1) Supposons que K/F soit excellente. Soit $\varphi \in I_q^2 F$ anisotrope. Alors, il existe $\psi \in W_q(F)$ anisotrope telle que $(\varphi_K)_{an} \simeq \psi_K$. Par [10, Lemma 2.1] on peut supposer $\psi \in I_q^2 F$.

(2) Il est bien connu que toute extension quadratique de F est excellente [15, Lemma 5.4]. D'après [14], toute extension multiquadratique purement inséparable de F est excellente. $\square$

On va prouver le résultat suivant donnant d'autres exemples d'éléments de $\mathcal{E}_2(F)$ et qui servira pour la preuve du théorème 1.

Proposition 2. *Supposons que $I_q^3 F = 0$. Soit K une extension de F qui est de l'un des trois types suivants:*

(1) biquadratique séparable.
(2) multiquadratique de degré de séparabilité ≤ 2.
(3) triquadratique de degré de séparabilité 4.

Alors, l'extension K/F appartient à $\mathcal{E}_2(F)$.

On sait qu'il existe un corps F_0 de caractéristique 2 et une extension biquadratique séparable de F_0 qui n'est pas excellente (cet exemple a été construit en premier en caractéristique $\neq 2$ puis a été étendu à la caractéristique 2 dans [22]). On renvoie aussi au corollaire 7 où on donne un autre exemple d'extension biquadratique séparable non-excellente. Ainsi, l'assertion (1) de la proposition précédente montre qu'en général l'ensemble $\mathcal{E}_2(F)$ est différent de celui de toutes les extensions excellentes de F.

Avant de prouver la proposition 2, on aborde un autre problème qui est considéré comme la réciproque (à équivalence de Witt près) de l'excellence pour les formes de $I_q^m F$.

Problème 1. (Descente en degré m).
Soient K/F une extension et $\varphi \in I_q^m K \cap \mathrm{Im}(W_q(F) \longrightarrow W_q(K))$. A-t-on $\varphi \in \mathrm{Im}(I_q^m F \longrightarrow I_q^m K)$?

En général, la réponse à ce problème est liée au calcul du noyau $\mathrm{Ker}(H_2^{m+1}(F) \longrightarrow H_2^{m+1}(K))$ dont la complexité dépend de la structure de l'extension K/F. Voici un calcul qui nous intéresse dans cet article.

Théorème 3. ([5], [6]) *Soient $K = F(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_n})$ une extension purement inséparable de F de degré 2^n, et $L = F(\alpha, \beta)$ une extension biquadratique séparable avec $\alpha^2 + \alpha = a \in F \setminus \wp(F)$ et $\beta^2 + \beta = b \in F \setminus \wp(F)$. Soit M l'un des corps suivants: K, $K(\alpha)$ et $K(\alpha, \beta)$. Alors, pour tout entier $m \geq 1$ on a:*

$$\mathrm{Ker}(H_2^{m+1}(F) \longrightarrow H_2^{m+1}(M)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \overline{\frac{da_i}{a_i} \wedge \Omega_F^{m-1}} & \text{si } M = K, \\ \sum_{i=1}^n \overline{\frac{da_i}{a_i} \wedge \Omega_F^{m-1}} + \overline{a\nu_F(m)} & \text{si } M = K(\alpha), \\ \sum_{i=1}^n \overline{\frac{da_i}{a_i} \wedge \Omega_F^{m-1}} + \overline{a\nu_F(m)} + \overline{b\nu_F(m)} & \text{si } M = K(\alpha, \beta). \end{cases}$$

En utilisant les isomorphismes de Kato (2.1) et (2.2), le théorème précédent se traduit dans le langage des formes quadratiques comme suit:

Corollaire 2. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème 3. Alors:*

$$\mathrm{Ker}(\overline{I_q^{m+1}}F \longrightarrow \overline{I_q^{m+1}}M) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \overline{\langle\langle a_i \rangle\rangle_b \otimes I_q^m F} & \text{si } M = K, \\ \sum_{i=1}^n \overline{\langle\langle a_i \rangle\rangle_b \otimes I_q^m F} + \overline{I^m F \otimes [1, a]} & \text{si } M = K(\alpha), \\ \sum_{i=1}^n \overline{\langle\langle a_i \rangle\rangle_b \otimes I_q^m F} + \overline{I^m F \otimes [1, a]} + \overline{I^m F \otimes [1, b]} & \text{si } M = K(\alpha, \beta). \end{cases}$$

En procédant par les mêmes arguments utilisés dans [6, Section 6], après s'être ramené à un corps de base ayant une 2-base finie, on obtient du corollaire 2:

Corollaire 3. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème 3. Alors:*

$$\mathrm{Ker}(I_q^{m+1}F \longrightarrow I_q^{m+1}M) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes I_q^m F & \textit{si } M = K, \\ \sum_{i=1}^n \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes I_q^m F + I^m F \otimes [1,a] & \textit{si } M = K(\alpha), \\ \sum_{i=1}^n \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes I_q^m F + I^m F \otimes [1,a] + I^m F \otimes [1,b] & \textit{si } M = K(\alpha,\beta). \end{cases}$$

Pour ce qui est du problème 1, on obtient la réponse suivante:

Corollaire 4. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème 3. Alors, le problème 1 a une réponse positive pour l'extension M/F, c'est-à-dire, on a*

$$I_q^m M \cap \mathrm{Im}(W_q(F) \longrightarrow W_q(M)) = \mathrm{Im}(I_q^m F \longrightarrow I_q^m M).$$

Preuve. L'inclusion $\supset$ est évidente. Montrons alors l'inclusion $\subset$. La preuve est la même pour les corps $K, K(\alpha)$ et $K(\alpha,\beta)$. On se limite à considérer le cas $M = K$. Soient $\varphi \in I_q^m K$ et $\psi \in W_q(F)$ tel que $\varphi \sim \psi_K$. Soit p tel que $\psi \in I_q^p F$. Si $p \geq m$, alors il n'y a rien à prouver. Supposons que $p < m$. La condition $\varphi \sim \psi_K$ implique $\psi + I_q^{p+1}F \in \mathrm{Ker}(\overline{I_q^p}F \longrightarrow \overline{I_q^p}K)$. Par le corollaire 2, on a $\psi + \sum_{i=1}^n \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes \varphi_i \in I_q^{p+1}F$ pour certaines formes $\varphi_i \in I_q^{p-1}F$. Soit $\psi' = \psi + \sum_{i=1}^n \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes \varphi_i \in I_q^{p+1}F$. On a $\psi'_K \sim \psi_K \sim \varphi$. Si $m = p+1$ alors on a l'affirmation souhaitée. Si $m > p+1$, alors $\psi' + I_q^{p+2}F \in \mathrm{Ker}(\overline{I_q^{p+1}}F \longrightarrow \overline{I_q^{p+1}}K)$. Ainsi de suite on continue le procédé jusqu'à avoir une forme $\gamma := \psi + \sum_{i=1}^n \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes \gamma_i \in I_q^m F$ pour certaines formes $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in W_q(F)$. Comme $\gamma \in I_q^m F$ et $\gamma_K \sim \varphi$, alors $\varphi \in \mathrm{Im}(I_q^m F \longrightarrow I_q^m K)$. $\square$

On a le corollaire suivant:

Corollaire 5. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème 3. Si $I_q^m F = 0$, alors $I_q^m M \cap \mathrm{Im}(W_q(F) \longrightarrow W_q(M)) = 0$.*

Pour la preuve de la proposition 2 on aura besoin du lemma suivant. Dans le cas d'une extension quadratique inséparable, ce lemme est une conséquence du résultat [2, Theorem 3.1] de Aravire et Baeza sur le ν-invariant en caractéristique 2. Pour garder cet article "self-contained", on donnera une preuve mettant le lien avec le problème 1.

Lemme 1. *Soit L/F une extension quadratique. Si $I_q^m F = 0$, alors $I_q^m L = 0$.*

Preuve. Posons $L = F(\alpha)$ tel que $\alpha^2 = d \in F \setminus F^2$ ou $\alpha^2 + \alpha \in F \setminus \wp(F)$. Soit $s : L \longrightarrow F$ l'application F-linéaire donnée par: $s(1) = 0$ et $s(\alpha) = 1$. Notons $s_* : W_q(L) \longrightarrow W_q(F)$ le transfert induit par s. Par [12, Corollary 34.17] on a $s_*(I_q^m L) \subset I_q^m F$. Ainsi, $s_*(I_q^m L) = 0$. Soit $\varphi \in I_q^m L$. On a $s_*(\varphi) \sim 0$.

(1) Supposons que K/F soit séparable. Alors par la suite exacte [3, sequence (6.1)] la condition $s_*(\varphi) \sim 0$ implique $\varphi \sim 0$.

(2) Supposons que K/F soit inséparable. Supposons que φ soit anisotrope de dimension ≥ 2. Puisque $s_*(\varphi)$ est hyperbolique, elle est en particulier isotrope. Il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $s_*(\varphi)(v)$, où V est l'espace sous-jacent à φ. Par conséquent, $b := \varphi(v) \in F$. On a $b \neq 0$ car φ est anisotrope et $v \neq 0$. Ainsi, $\varphi \simeq b[1,c] \perp \varphi'$ pour $c \in L$ et φ' une forme quadratique sur L. Puisque $[1,c] \simeq [1,c^2]$, on peut supposer $c \in F$. Ainsi, $s_*(\varphi') = 0$. Par récurrence sur la dimension de φ, on déduit que φ' est définie sur F. Ainsi, $\varphi \in \mathrm{Im}(W_q(F) \longrightarrow W_q(L))$. Comme $I_q^m F = 0$ et $\varphi \in I_q^m L$, on déduit par le corollaire 5 que $\varphi = 0$, une contradiction à notre hypothèse. D'où , $\varphi \sim 0$. $\square$

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 6. *Soit L/F une extension multiquadratique. Si $I_q^m F = 0$, alors $I_q^m L = 0$.*

Preuve de la proposition 2

Soit L une extension de F qui est de l'un des trois types suivants:

(a) multiquadratique purement inséparable.

(b) quadratique séparable.

(c) mixed biquadratique (c'est-à-dire, la composée de deux extensions quadratiques de F, l'une séparable et l'autre inséparable).

On rappelle que l'extension L/F est excellente: Le cas (a) est dû à Hoffmann [14]; (b) est dû à Hoffmann et Laghribi [15, Lemma 5.4]; et (c) a été récemment prouvé par Mukhija [22].

Soit $F(\alpha)/F$ une extension quadratique séparable avec $\alpha^2 + \alpha = a \in F \setminus \wp(F)$, et soit $K = L(\alpha)$. On suppose $[K : L] = 2$ dans les cas (b) et (c).

La preuve qu'on va produire reprend les arguments utilisés dans [8, Lemma 2.1] montrant que les extensions biquadratiques en caractéristique différente de 2 satisfont à l'excellence pour les formes de I^2.

Soit $\varphi \in I_q^2F$ anisotrope tel que φ_K soit isotrope. Il n'y a rien à prouver si φ_K est hyperbolique. Supposons que φ_K ne soit pas hyperbolique. On commence par montrer que $(\varphi_K)_{an}$ est définie sur F.

Puisque L/F est excellente, la forme $(\varphi_L)_{an}$ est définie sur F. Si $(\varphi_L)_{an}$ est anisotrope sur K, alors $(\varphi_K)_{an}$ est définie sur F. Supposons que $(\varphi_L)_{an}$ soit isotrope sur K d'indice de Witt r. Alors, $(\varphi_L)_{an} \simeq \langle x_1, \cdots, x_r\rangle_b \otimes [1, a] \perp \varphi'$ avec $x_i \in L^\times$ et φ' une forme quadratique sur L qui est anisotrope sur K (on applique r fois le résultat [8, Theorem 4.2, page 121]). Puisque $I_q^3L = 0$, alors $\langle 1, x_1\rangle \otimes (\varphi_L)_{an} \sim 0$. Ainsi, $(\varphi_L)_{an} \simeq x_1(\varphi_L)_{an}$, et donc on peut supposer $x_1 = 1$. Toujours de l'hypothèse $I_q^3L = 0$, toute 3-forme de Pfister sur L est hyperbolique, et par conséquent toute forme voisine de Pfister de dimension 5 sur L est isotrope. Cela implique que $r = 1$, c'est-à-dire, $(\varphi_L)_{an} \simeq [1, b] \perp \varphi'$. Puisque $\varphi' \in \mathrm{Im}(W_q(F) \longrightarrow W_q(L))$ et que L/F est excellente, il existe $\varphi_0 \in W_q(F)$ tel que $\varphi' \simeq (\varphi_0)_L$. Comme φ'_K est anisotrope, alors $(\varphi_K)_{an} \simeq (\varphi_0)_K$. Finalement, en utilisant [10, Lemma 2.1], on peut supposer que $\varphi_0 \in I_q^2F$.

PREUVE DU THÉORÈME 1

On suppose $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$. Soit A une F-algèbre centrale à division d'exposant 2 et de degré 2^n. Soit K une extension multiquadratique de F de l'un des trois types décrits dans le théorème. Posons $[K : F] = 2^k$ et écrivons $K = F(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_r}, \alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ tel que $a_i \in F \setminus F^2$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $\alpha_j^2 + \alpha_j = b_j \in F \setminus \wp(F)$ pour tout $1 \leq j \leq s$, avec $r + s = k$.

Puisque $\mathrm{cd}_2(F) \leq 2$, il existe une forme $\varphi \in I_q^2F$ anisotrope de dimension $2n + 2$ telle que $A = D_\varphi$ (proposition 2). De plus, on a $I_q^3K = 0$.

(1) Supposons que K soit de degré de séparabilité ≤ 2 ou triquadratique de degré de séparabilité 4, ce qui revient à dire $s = 0$ ou ($r \geq 1$ et $s = 1$) ou ($r = 1$ et $s = 2$). Supposons $\mathrm{ind}(D_\varphi)_K = 2^{n-k}$.

Par le corollaire 1 appliqué au corps K (car $\mathrm{cd}_2(K) \leq 2$), on a $\dim(\varphi_K)_{an} = 2(n - k) + 2$. Par la proposition 2, il existe une forme $\varphi' \in I_q^2F$ de dimension $2(n - k) + 2$ telle que $(\varphi_K)_{an} \simeq \varphi'_K$. On a $C(\varphi') \simeq M_2(B)$ avec B un produit de $n - k$ algèbres de quaternions. Puisque $\varphi \perp \varphi' \in \mathrm{Ker}(I_q^2F \longrightarrow I_q^2K)$, on applique le corollaire 3 pour avoir

$$\varphi \perp \varphi' \sim \begin{cases} \sum_{i=1}^r \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes \varphi_i & \text{si } s = 0, \\ \sum_{i=1}^r \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes \varphi_i + \sum_{j=1}^s \rho_j \otimes [1, b_j] & \text{si } (r \geq 1 \text{ et } s = 1) \text{ ou } (r = 1 \text{ et } s = 2), \end{cases}$$

pour des formes convenables $\varphi_1, \cdots, \varphi_r \in W_q(F)$ et $\rho_1, \cdots, \rho_s \in IF$. En passant à l'algèbre de Clifford, on obtient dans $\mathrm{Br}(F)$:

$$C(\varphi) + C(\varphi') \sim \begin{cases} \otimes_{i=1}^r [c_i, a_i) & \text{si } s = 0, \\ (\otimes_{i=1}^r [c_i, a_i)) \otimes (\otimes_{j=1}^s [b_j, d_j)) & \text{si } (r \geq 1 \text{ et } s = 1) \text{ ou } (r = 1 \text{ et } s = 2), \end{cases}$$

pour des scalaires convenables $c_1, \cdots, c_r \in F$ et $d_1, \cdots, d_s \in F^\times$. Puisque B est un produit de $n - k$ algèbres de quaternions, on obtient par comparaison des dimensions que $A \simeq B \otimes C$, où l'algèbre C est produit de k algèbres de quaternions donnée par:

$$C = \begin{cases} \otimes_{i=1}^r [c_i, a_i) & \text{si } s = 0, \\ (\otimes_{i=1}^r [c_i, a_i)) \otimes (\otimes_{j=1}^s [b_j, d_j)) & \text{si } (r \geq 1 \text{ et } s = 1) \text{ ou } (r = 1 \text{ et } s = 2). \end{cases}$$

D'où, A admet une décomposition adaptée à K.

(2) Supposons que K soit de degré de séparabilité 4, $[K : F] = 2^n$ et $A_K \sim 0$. On obtient que φ_K est hyperbolique (corollaire 1). Par le corollaire 3, $\varphi \sim \sum_{i=1}^r \langle\langle a_i\rangle\rangle_b \otimes \varphi_i + \rho_1 \otimes [1, b_1] + \rho_2 \otimes [1, b_2]$ pour

des formes convenables $\varphi_1, \cdots, \varphi_r \in W_q(F)$ et $\rho_1, \rho_2 \in IF$. On conclut comme dans (1) en passant par l'algèbre de Clifford.

4. Un contre-exemple à la décomposition adaptée

Notre but dans cette section est de donner une preuve de la proposition 1. Pour cela on utilisera l'article [18] de Leep et Smith consacré à l'étude du noyau de Witt des extensions triquadratiques en caractéristique différente de 2. Plus exactement, pour une extension triquadratique $F_0(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ d'un corps F_0 de caractéristique différente de 2, le résultat [18, Lemma 4.1] donne une méthode pour construire des $F_0(\sqrt{a})$-formes quadratiques de dimension 4 qui ont la propriété d'être définies sur F et hyperboliques sur $F_0(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$. Ce résultat clarifie l'exemple [13, Exemple 5.8(v)] qui a motivé la proposition 1 (voir le commentaire [18, Page 254]). On commence par établir l'analogue en caractéristique 2 de [18, Lemma 4.1]:

Proposition 3. *Soit $M = F(\wp^{-1}(a), \wp^{-1}(b), \wp^{-1}(c))$ une extension triquadratique séparable de F, et $K = F(\wp^{-1}(a))$. Posons $\alpha = \wp^{-1}(a)$ et soit $\varphi = \beta[1, b] \perp \gamma[1, c]$ une K-forme quadratique, où $\beta = s + t\alpha$ et $\gamma = u + v\alpha$ sont des éléments de $K^\times$ avec $s, t, u, v \in F$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes:*
(1) φ est définie sur F.
(2) $\langle\langle N_{K/F}(\beta), b]] \simeq \langle\langle N_{K/F}(\gamma), c]]$, et si $tv \neq 0$, alors $tv \in D_F(\langle\langle N_{K/F}(\beta), b]])$, où $N_{K/F}$ désigne la norme relative à l'extension K/F.

Preuve. On reprend les mêmes arguments donnés dans [18]. Soit $s : K \longrightarrow F$ l'application F-linéaire donnée par: $s(1) = 0$ et $s(\alpha) = 1$. Soit s_* l'application transfert induite par s au niveau de l'anneau de Witt (ou groupe de Witt). On rappelle le calcul suivant donné dans $W(F)$:

$$s_*(\langle\beta\rangle_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t\,\langle 1, N_{K/F}(\beta)\rangle_b & \text{si } t \neq 0, \end{cases}$$

et de manière analogue on a

$$s_*(\langle\gamma\rangle_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = 0 \\ v\,\langle 1, N_{K/F}(\gamma)\rangle_b & \text{si } v \neq 0. \end{cases}$$

En utilisant la réciprocité de Frobenius, on obtient dans $W_q(F)$:

$$s_*(\varphi) \simeq s_*(\langle\beta\rangle_b) \otimes [1, b] \perp s_*(\langle\gamma\rangle_b) \otimes [1, c].$$

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que φ soit définie sur F. Alors, $s_*(\varphi) = 0$ et donc $s_*(\langle\beta\rangle_b) \otimes [1, b] \simeq s_*(\langle\gamma\rangle_b) \otimes [1, c]$.

- Supposons $tv = 0$. On peut supposer $t = 0$. Alors, $\beta \in F$ et $s_*(\langle\beta\rangle_b) \sim 0 \sim \langle 1, N_{K/F}(\beta)\rangle_b$ (car $N_{K/F}(\beta) \in F^2$). En particulier, $s_*(\langle\gamma\rangle_b) \otimes [1, c] \sim 0 \sim \langle 1, N_{K/F}(\gamma)\rangle_b \otimes [1, c]$. Ainsi, $\langle\langle N_{K/F}(\beta), b]] \simeq \langle\langle N_{K/F}(\gamma), c]]$.
- Si $tv \neq 0$. Alors, on obtient $t\,\langle 1, N_{K/F}(\beta)\rangle_b \otimes [1, b] \simeq v\,\langle 1, N_{K/F}(\gamma)\rangle_b \otimes [1, c]$. Par la multiplicativité d'une forme de Pfister, on déduit $\langle\langle N_{K/F}(\beta), b]] \simeq \langle\langle N_{K/F}(\gamma), c]]$ et $tv \in D_F(\langle\langle N_{K/F}(\beta), b]])$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que les conditions de (2) soient vérifiées.

Supposons que $t = 0$ (le même argument s'applique pour le cas $v = 0$). Alors, $\beta \in F$ et $\langle\langle N_{K/F}(\beta), b]] \sim 0 \sim \langle\langle N_{K/F}(\gamma), c]] = s_*(\gamma[1, c])$. Par conséquent, $\gamma[1, c]$ est définie sur F et donc φ l'est aussi.

Supposons $tv \neq 0$. Alors, la condition $tv \in D_F(\langle\langle N_{K/F}(\beta), b]])$ implique que $t\,\langle\langle N_{K/F}(\beta), b]] \simeq v\,\langle\langle N_{K/F}(\gamma), c]]$. Par conséquent, $s_*(\varphi) = 0$ et donc φ est définie sur F. □

On donne un lemme préliminaire.

Lemme 2. *Soient x une indéterminée sur F et u une unité pour la valuation x-adique du corps des fractions rationnelles $F(x)$. Alors, pour tout $\epsilon \in \mathbb{Z}$ impair, la forme $[1, ux^\epsilon]$ est anisotrope sur $F(x)$.*

Preuve. Supposons que $\epsilon < 0$ et que $[1, ux^\epsilon]$ soit isotrope sur $F(x)$. Il existe des polynômes $A, B \in F[x]$ premiers entre eux tels que $A^2 + AB + ux^\epsilon B^2 = 0$. Ainsi, $x^{-\epsilon}A^2 + x^{-\epsilon}AB = uB^2$. Par conséquent, la valuation de B^2 est $\geq -\epsilon + 1$. En particulier, x divise B et on peut écrire $B = x^{\frac{-\epsilon+1}{2}}C$ pour un certain $C \in F[x]$. Donc, $A^2 + x^{\frac{-\epsilon+1}{2}}AC + uxC^2 = 0$. Par conséquent, x divise A, ce qui est absurde car les polynômes A et B sont supposés premiers entre eux.

Le cas où $\epsilon > 0$ se traite de la même façon en utilisant le fait que $F(x) = F(x^{-1})$ et en travaillant avec la vaulation x^{-1}-adique. $\square$

Pour le reste de cette section, on prend $F = k(x, y)$ le corps des fractions rationnelles en les variables x et y sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 2. Soit $K = F(\alpha)$, où α est une racine de $Y^2 + Y + x \in F[Y]$. On fixe les notations suivantes:

$$(\star) \qquad \begin{cases} \beta = x\alpha \text{ et } \gamma = y^{-1} + x\alpha, \\ M = F(\alpha, \wp^{-1}(b), \wp^{-1}(c)), \\ a = x,\ b = x^{-2}y^{-1} + 1 \text{ et } c = x^{-3}(y^{-2} + xy^{-1} + x^3). \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'extension M/F est de degré 8. Soit φ la forme quadratique sur K de dimension 4 donnée par:

$$\varphi = \beta[1, b] \perp \gamma[1, c].$$

On rappelle une isométrie:

$$(\star\star) \qquad \langle\langle r, s]] \simeq \langle\langle r, r + s]] \quad \text{pour tous } r, s \in F \text{ avec } r \neq 0.$$

De plus, avec les notations $(\star)$ ci-dessus, on vérifie $N_{K/F}(\gamma) = cN_{K/F}(\beta)$ et $b = c + N_{K/F}(\beta)^{-1}y^{-2}$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \langle\langle N_{K/F}(\gamma), c]] &= \langle\langle cN_{K/F}(\beta), c]] \\ &\simeq \langle\langle N_{K/F}(\beta), c]] \quad (\text{car } c[1, c] \simeq [1, c]) \\ &\simeq \langle\langle N_{K/F}(\beta)^{-1}y^{-2}, c]] \\ &\simeq \langle\langle N_{K/F}(\beta)^{-1}y^{-2}, c + N_{K/F}(\beta)^{-1}y^{-2}]] \quad (\text{par } (\star\star)) \\ &\simeq \langle\langle N_{K/F}(\beta), b]]\,. \end{aligned}$$

Comme $x^2 \in \langle\langle N_{K/F}(\beta), b]]$, alors toutes les conditions de l'assertion (2) de la proposition 3 sont vérifiées, et par conséquent φ est définie sur F. Soit ψ une F-forme de dimension 4 telle que $\varphi \simeq \psi_K$.

On a la proposition suivante:

Proposition 4. *La F-forme quadratique ψ est hyperbolique sur M mais n'appartient pas à $W(F) \otimes [1, a] + W(F) \otimes [1, b] + W(F) \otimes [1, c]$.*

Preuve. Soit $L = F(\alpha, \wp^{-1}(x^{-3}y^{-2}))$. Comme k est algébriquement clos, on a $1 \in \wp(k)$, c'est-à-dire, $[1, 1]$ est hyperbolique. Il est clair que $[1, c]_L \simeq [1, x^{-2}y^{-1}]_L$ puisque $[1, x^{-3}y^{-2} + 1]_L \sim 0$.

L'hyperbolicité de ψ_M est claire car $\psi_M \simeq (\psi_K)_M \simeq \varphi_M \sim 0$. Supposons que $\psi \in W(F) \otimes [1, a] + W(F) \otimes [1, b] + W(F) \otimes [1, c]$. Puisque $\varphi \simeq \psi_K$ et $[1, c]_L \simeq [1, x^{-2}y^{-1}]_L$, on obtient

$$(4.1) \qquad (\langle\beta, \gamma\rangle_b \otimes [1, x^{-2}y^{-1}])_L \sim (\rho \otimes [1, x^{-2}y^{-1}])_L$$

pour une certaine F-forme bilinéaire ρ.

Posons $E = F(\wp^{-1}(x^{-3}y^{-2}))$. Soit $s : L \longrightarrow E$ l'application E-linéaire donnée par: $s(1) = 0$ et $s(\alpha) = 1$. On vérifie qu'on a dans $W(E)$ (les calculs sont faits relativement à la E-base $\{1, \alpha\}$ de L):

(1) $s_*(\langle 1\rangle_b) \sim 0$ car $s_*(\langle 1\rangle_b)$ est une forme bilinéaire de dimension 2 isotrope puisque $s(1) = 0$.

(2) $s_*(\langle\beta\rangle_b) = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x + x^2 \end{pmatrix} \simeq \langle 1, x\rangle_b$.

(3) $s_*(\langle\gamma\rangle_b) = \begin{pmatrix} x & x + y^{-1} \\ x + y^{-1} & x + x^2 + y^{-1} \end{pmatrix} \simeq \langle x, y^{-1} + x^2 + x^{-1}y^{-2}\rangle_b$.

Ainsi, en appliquant à l'équation (4.1) le transfert s_* induit par s, et en utilisant la réciprocité de Frobenius, on obtient:

(4.2) $\quad (\langle 1, x, x, y^{-1} + x^2 + x^{-1}y^{-2}\rangle_b \otimes [1, x^{-2}y^{-1}])_E \sim s_*(\langle 1\rangle_b) \otimes \rho[1, x^{-2}y^{-1}]_E \sim 0.$

Comme $\langle x, x\rangle_b$ est un plan métabolique, il est facile de voir que l'équation (4.2) s'écrit:

$$(\langle 1, x(1 + y^2x^3 + xy)\rangle_b \otimes [1, x^{-2}y^{-1}])_E \sim 0. \tag{4.3}$$

En utilisant l'isométrie $k[1, l] \simeq kl[1, l]$, l'équation (4.3) s'écrit

$$(\langle 1, xy(1 + y^2x^3 + xy)\rangle_b \otimes [1, x^{-2}y^{-1}])_E \sim 0. \tag{4.4}$$

Posons $\zeta = xy(1 + y^2x^3 + xy)$. Notons que ζ n'est pas un carré dans F. Puisque E/F est séparable, alors ζ n'est pas un carré dans E. Par conséquent, $\frac{d\zeta}{\zeta} \neq 0$ dans $\nu_E(1)$. En utilisant l'isomorphisme (2.1), l'isométrie dans (4.3) se traduit par la relation $\overline{x^{-2}y^{-1}\frac{d\zeta}{\zeta}} = 0$ dans $H_2^2(E)$. Autrement dit, $\overline{x^{-2}y^{-1}} \in E/\wp(E)$ appartient à l'annulateur du symbole $\frac{d\zeta}{\zeta}$ défini par:

$$\mathrm{annq}_0(\frac{d\zeta}{\zeta}) := \left\{\overline{z} \in E/\wp(E) \mid \overline{z\frac{d\zeta}{\zeta}} = 0 \in H_2^2(E)\right\}.$$

Cet annulateur a été étudié dans [4] pour les deux types de symboles (logarithmique et quadratique). En particulier, dans notre cas on a d'après [4, Proposition 4.3] $\overline{x^{-2}y^{-1}} = \overline{z} \in E/\wp(E)$, où $z = \zeta.A^2$ pour $A \in E^\times$ convenable. Ainsi, on a l'isométrie suivante sur le corps E:

$$[1, x^{-2}y^{-1}] \simeq [1, \zeta.A^2]. \tag{4.5}$$

On affirme que $A \in F$. En effet, on écrit $A = a' + b'\delta$ pour $a', b' \in F$, où $\delta = \wp^{-1}(x^{-3}y^{-2})$. On considère le transfert Tr_* induit par l'application trace de E/F. En appliquant Tr_* à l'isométrie $[1, x^{-2}y^{-1}] \simeq [1, \zeta.A^2]$, on déduit que $\mathrm{Tr}_*([1, \zeta.A^2]) = 0$ car $[1, x^{-2}y^{-1}]$ est définie sur F. De plus, par [12, Lemma 34.14], on a $\mathrm{Tr}_*([1, \zeta.A^2]) \equiv [1, \mathrm{Tr}(\zeta.A^2)] \pmod{I_q^2F}$. On obtient par le Hauptsatz que $[1, \mathrm{Tr}(\zeta.A^2)] = [1, \zeta.b'^2]$ est hyperbolique. Ainsi, on a nécessairement $b' = 0$ par le lemme 2 en considérant la valuation x-adique de F.

Notons que la forme $[1, x^{-2}y^{-1} + \zeta.A^2]$ est anisotrope sur F. Sinon, on aurait $[1, x^{-2}y^{-1}] \simeq [1, \zeta.A^2]$ et ainsi, par la multiplicativité d'une forme de Pfister, on obtiendrait

$$[1, x^{-2}y^{-1}] \simeq \zeta[1, x^{-2}y^{-1}] = xy(1 + y^2x^3 + xy)[1, x^{-2}y^{-1}] \simeq x(1 + y^2x^3 + xy)[1, x^{-2}y^{-1}]. \tag{4.6}$$

On étend l'équation (4.6) au corps $k(x)((y))$ et on prend la valuation y-adique. Par le cas (B), la première forme résiduelle de $[1, x^{-2}y^{-1}]$ est $\langle 1\rangle$ alors que celle de $x(1 + y^2x^3 + xy)[1, x^{-2}y^{-1}]$ est $\langle x\rangle$, ce qui est absurde.

Puisque $A \in F$ et que la forme $[1, x^{-2}y^{-1} + \zeta.A^2]$ est anisotrope sur F, on déduit de l'équation (4.5) l'isométrie suivante sur F:

$$[1, x^{-3}y^{-2} + \zeta.A^2] \simeq [1, x^{-2}y^{-1}]. \tag{4.7}$$

On étend l'équation (4.7) au corps $k(x)((y))$. Cette forme reste anisotrope sur $k(x)((y))$. On pose $A = y^\epsilon u$, où $\epsilon \in \mathbb{Z}$ et u est une unité pour la valuation y-adique de $k(x)((y))$. Les deux formes résiduelles de $[1, x^{-2}y^{-1}]$ sont isométriques à $\langle 1\rangle$. Pour le membre de gauche, on montre que la première (ou la seconde) forme résiduelle n'est pas isométrique à $\langle 1\rangle$, ce qui donne une contradiction. Pour cela on discute sur l'entier ϵ:

Cas 1. Supposons $\epsilon \geq -1$. Alors, $2\epsilon + 3 > 0$. On a

$$[1, x^{-3}y^{-2} + \zeta.A^2] \;=\; [1, y^{-2}(x^{-3} + x(1 + y^2x^3 + xy)y^{2\epsilon+3}u^2)].$$

Par le cas (C), la première forme résiduelle de $[1, x^{-3}y^{-2} + \zeta.A^2]$ est $\langle 1, x\rangle$.

Cas 2. Supposons $\epsilon < -1$. Alors, $-2 - (2\epsilon + 1) > 0$. On a

$$[1, x^{-3}y^{-2} + \zeta.A^2] \;=\; [1, y^{2\epsilon+1}(x^{-3}y^{-2-(2\epsilon+1)} + x(1 + y^2x^3 + xy)u^2)].$$

Par le cas (B), la seconde forme résiduelle de $[1, x^{-3}y^{-2} + \zeta.A^2]$ est $\langle x\overline{u}^2\rangle \simeq \langle x\rangle$.

Ceci achève la preuve de la proposition. □

On obtient le corollaire suivant:

Corollaire 7. *L'extension biquadratique $F(\wp^{-1}(a), \wp^{-1}(b))/F$ n'est pas excellente.*

Preuve. On a $\Delta(\psi_K) = b + c \in K/\wp(K)$. Ainsi, $\Delta(\psi) = \epsilon a + b + c \in F/\wp(F)$ pour $\epsilon = 0$ ou 1. Puisque $[1, a]_K \sim 0$, on peut supposer que $\Delta(\psi) = a + b + c \in F/\wp(F)$. La forme ψ est anisotrope sur F car sinon il existerait $r \in F^\times$ tel que $\psi \sim r[1, a + b + c] \sim r[1, a] \perp r[1, b] \perp r[1, c]$, ce qui est exclu par la proposition 4.

Posons $L = F(\wp^{-1}(a), \wp^{-1}(b))$. Comme $M = L(\wp^{-1}(c))$, ψ_M est hyperbolique et $\Delta(\psi_L) = c \in L/\wp(L)$, on déduit que ψ_L est isotrope [19, Lemme 4.3]. Suppsons que $(\psi_L)_{an}$ soit définie sur F. Alors, il existe $r \in F^\times$ tel que $\psi_L \sim r[1, c]_L$. Ainsi, $(\psi \perp r[1, c])_L \sim 0$. Par [7, Corollary 4.16], il existe ρ, ρ' des F-formes bilinéaires telles que $\psi \perp r[1, c] \sim \rho \otimes [1, a] \perp \rho' \otimes [1, b]$, ce qui n'est pas possible par la proposition 4. Ceci montre que l'extension L/F n'est pas excellente. □

Les premiers exemples des extensions biquadratiques qui ne sont pas excellentes ont été donnés dans [13, Example 5.8]. En caractéristique 2 la situation est différente. On sait que les extensions biquadratiques purement inséparables sont excellentes par un résultat de Hoffmann [14]. Récemment, il a été prouvé dans [22] que toute extension biquadratique mixte est excellente [22]. En général une extension biquadratique séparable n'est pas excellente. Cela a été fait dans [22] en généralisant à la caractéristique 2 un exemple de Sivatski. Cette généralisation repose sur un résultat de Rowen donnant l'existence d'une algèbre centrale à division indécomposable de degré 8 et d'exposant 2. Le corollaire 7 donne un nouveau exemple de la non-excellence des extensions biquadratiques séparables en caractéristique 2.

Preuve de la proposition 1. Soit ψ comme dans la proposition 4. On considère la forme $\psi' = \psi \perp [1, \Delta(\psi)] \perp [0, 0]$ de dimension 8 appartenant à $I_q^2 F$. On a $C(\psi') \simeq M_2(A)$ pour A une F-algèbre de degré 8. Puisque ψ est anisotrope (voir la preuve du corollaire 7), l'algèbre A est d'indice 4 (corollaire 1). Puisque ψ_M est hyperbolique, alors A_M est déployée. Mais A n'admet pas de décomposition adaptée à M car sinon il existerait une forme $\psi'' \in I_q^2 F$ vérifiant: $\psi'' \in W(F) \otimes [1, a] + W(F) \otimes [1, b] + W(F) \otimes [1, c]$ et $C(\psi'') \sim A \sim C(\psi')$. Ainsi, on aurait $\psi' \perp \psi'' \in I_q^3 F = 0$. Par conséquent, $\psi \in W(F) \otimes [1, a] + W(F) \otimes [1, b] + W(F) \otimes [1, c]$, ce qui est exclu par la proposition 4. □

L'algèbre de degré 8 et d'exposant 2 construite par Elman-Lam-Tignol-Wadsworth en caractéristique différente 2 et son analogue en caractéristique 2 que nous donnons dans la proposition 1 ont toutes les deux un centre de la forme $k(x, y)$ où k est un corps algébriquement clos. Il est bien connu que sur de tels corps $k(x, y)$, les algèbres simples centrales d'exposant 2 sont toutes d'indice au plus 2. Il devient assez naturel de se poser la question suivante: soient D une algèbre à division de degré 8 et d'exposant 2 sur un corps F vérifiant $\mathrm{cd}_2(F) = 2$, et K/F une extension triquadratique séparable telle que D_K soit déployée.

Question. *L'algèbre D admet-elle une décomposition adaptée à K?*

RÉFÉRENCES

[1] S. A. Amitsur, L. H. Rowen, J.-P. Tignol, *Division algebras of degree* 4 *and* 8 *with involution,* Isreal J. Math., **33** (1979), 133–148.

[2] R. Aravire, R. Baeza, *The behavior of the ν–invariant of a field of characteristic* 2 *under finite extensions*, Rocky Mountain J. Math, **19** (1989), 589-600.

[3] R. Aravire, R. Baeza, *Milnor's K-Theory and quadratic forms over fields of characteristic two,* Comm. Algebra **20** (1992), 1087-1107.

[4] R. Aravire, R. Baeza, *Annihilators of quadratic and bilinear forms over fields of characteristic two* J. Algebra **299** 2006, 294–308.

[5] R. Aravire, A. Laghribi, *Results on Witt kernels of quadratic forms for multiquadratic extensions in characteristic* 2, Proc. Amer. Math. Soc. **141**, no. 12 (2013), 4191–4197.

[6] R. Aravire, A. Laghribi, M. O'Ryan, *Cohomological kernels of mixed extensions in characteristic 2,* Journal of Algebra **542** (2020), 249–276.

[7] R. Baeza, *Quadratic forms over semilocal rings,* LNM 655, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1978.

[8] D. Barry, *Decomposable and indecomposable algebras of degree* 8 *and exponent* 2, Math. Z. **276** (2014), 1113–1132.

[9] D. Barry, *Power-central elements in tensor products of symbol algebras,* Com. in Algebra **44** (2016), 3767 – 3787.

[10] D. Barry, A. Chapman, *Square-central and Artin-Schreier elements in division algebras,* Archiv Math. (Basel) **104** (2015), 513–521.

[11] D. Barry, A. Chapman, A. Laghribi, *The descent of biquaternion algebras in characteristic two,* Isreal J. Math., **235** (2020), 295–323.

[12] R. Elman, N. Karpenko, A. Merkurjev, *The Algebraic and Geometric Theory Quadratic Forms,* Colloq. Publ., **56**, Am. Math. Soc., 2008.

[13] R. Elman, T. Y. Lam, J.-P. Tignol, A. Wadsworth, *Witt Rings and Brauer Groups Under Multiquadratic Extensions I,* Amer. J. Math. **105** (1983), 1119–1170.

[14] D. W. Hoffmann, *Witt kernels of quadratic forms for multiquadratic extensions in characteristic* 2*,* Proc. Am. Math. Soc. **143**, no. 12 (2015), 5073–5082.

[15] D. W. Hoffmann, A. Laghribi, *Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric in characteristic 2.*, J. Algebra, **295** (2006), no. 2, 362-386.

[16] B. Kahn, *Quelques remarques sur le* u*-invariant,* Sém. Théor. Nombres Bordeaux, **2** (1990), 155–161. Erratum in: Sém. Théor. Nombres Bordeaux **3**, 247,(1991).

[17] K. Kato, *Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor K-theory in characteristic* 2*,* Inventiones Math. **66** (1982), 493–510.

[18] D. B. Leep, T. L. Smith, *Witt kernels of triquadratic extensions,* Contemporary Mathematics **344** (2004), 249–256.

[19] A. Laghribi, *Certaines formes quadratiques de dimension au plus 6 et corps des fonctions en caractéristique 2*, Israel J. Math., **129** (2002), 317-361.

[20] P. Mammone, R. Moresi, *Formes quadratiques, algčbres ŕ division et extensions multiquadratiques inséparables,* Bull. Belg. Math. Soc. **2** (1995), 311-319.

[21] P. Mammone, R. Moresi, A. Wadsworth, u*-invariants of fields of characteristic* 2*,* Math. Z. **208** (1991), 335-347.

[22] D. Mukhija, *Quelques problèmes sur les corps de fonctions des quadriques en caractéristique* 2*,* Thèse de Doctorat de l'Université d'Artois, décembre 2021.

[23] C. H. Sah, *Symmetric bilinear forms and quadratic forms,* J. Algebra **20** (1972), 144–160.

[24] U.P. Tietze, *Zur Theorie quadratischer Formen über Hensel-Körpern,* Arch. Math. **35** (1974), 144–150.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE , UNIVERSITÉ DES SCIENCES, DES TECHNIQUES ET DES TECHNOLOGIES DE BAMAKO, COLLINE DE BADALABOUGOU BP E3206, BAMAKO, MALI
Email address: barry.demba@gmail.com

UNIV. ARTOIS, UR 2462, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE LENS (LML), F-62300 LENS, FRANCE
Email address: ahmed.laghribi@univ-artois.fr