

# Homologie d'intersection. Perversités générales et invariance topologique.

Chataur David, Daniel Tanré, Martintxo Saralegi-Aranguren

► **To cite this version:**

Chataur David, Daniel Tanré, Martintxo Saralegi-Aranguren. Homologie d'intersection. Perversités générales et invariance topologique.. 2016. <hal-01272027>

**HAL Id: hal-01272027**

**<https://hal-univ-artois.archives-ouvertes.fr/hal-01272027>**

Submitted on 10 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# HOMOLOGIE D'INTERSECTION. PERVERSITÉS GÉNÉRALES ET INVARIANCE TOPOLOGIQUE

*par*

David Chataur, Martintxo Saralegi-Aranguren & Daniel Tanré

---

**Résumé.** — L'invariance topologique de l'homologie d'intersection d'une pseudovariété, démontrée par M. Goresky et R. MacPherson, est une des propriétés majeures de cette homologie. Elle est vraie pour des perversités ne dépendant que de la codimension des strates et convenablement bornées, que nous appelons GM-perversités. H. King redémontre cette invariance en associant à chaque pseudovariété,  $X$ , une pseudovariété intrinsèque,  $X^*$ , pour laquelle existe un isomorphisme entre les homologies d'intersection,  $H_*^{\bar{p}}(X) \cong H_*^{\bar{p}}(X^*)$ , pour toute GM-perversité,  $\bar{p}$ .

Dans ce travail, nous démontrons qu'une certaine invariance topologique demeure dans le cadre de perversités définies de façon indépendante sur chacune des strates et non pas à partir de la seule codimension des strates. Pour cela, nous montrons que certaines perversités générales,  $\bar{p}$ , appelées K-perversités, définies sur une pseudovariété,  $X$ , induisent une perversité  $\bar{q}$  sur  $X^*$  et que l'on a toujours  $H_*^{\bar{p}}(X) \cong H_*^{\bar{q}}(X^*)$ . Si  $\bar{p}$  est une GM-perversité, alors  $H_*^{\bar{q}}(X^*) = H_*^{\bar{p}}(X^*)$  et on retrouve l'invariance topologique usuelle.

Nous étudions également l'extension de ce résultat à une variation de l'homologie d'intersection, appelée homologie d'intersection modérée, et plus particulièrement adaptée aux "grandes" perversités. Modulo un nécessaire contrôle du comportement des strates de  $X$  qui deviennent régulières dans  $X^*$ , nous montrons que le résultat précédent reste vrai dans ce cadre. En particulier, en présence de K-perversités, l'homologie d'intersection et l'homologie d'intersection modérée, sont invariantes par raffinement de la stratification lorsqu'il n'y a pas de strate de codimension 1.

L'homologie d'intersection d'une pseudovariété étant définie après le choix d'une stratification, se pose immédiatement la question de l'impact de ce choix sur le résultat. Le fait qu'il n'en dépende pas, appelé *invariance topologique* et démontré par M. Goresky et R. MacPherson dès leur premier article [9], est une des propriétés majeures de la théorie. Plus précisément, si  $\bar{p}: \mathbb{Z}_{>1} \rightarrow \mathbb{Z}$  est une perversité classique et vérifiant  $\bar{p}(t) \leq \bar{p}(t+1) \leq \bar{p}(t)+1$ ,  $\bar{p}(2) = 0$ , alors l'homologie d'intersection est un invariant

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 55N33, 58A35, 57N80.

**Mots clefs.** — Homologie d'intersection; Invariance Topologique; Perversité; CS-ensemble; CS-ensemble intrinsèque; Pseudovariété.

Le troisième auteur a bénéficié du support du MINECO grant MTM2013-41768-P et de ANR-11-LABX-0007-01 "CEMPI".

du type d'homéomorphisme d'une pseudovariété sans strate de codimension 1. Dans le suite, nous appelons GM-perversités les perversités vérifiant les propriétés précédentes.

L'homologie d'intersection existe également pour des perversités plus générales, définies sur l'ensemble des strates d'une pseudovariété stratifiée et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , cf. [12, Section 1.1] et Remarque 2.6. De telles perversités étant définies à partir des strates, il est naturel de conclure qu'aucune invariance topologique ne peut subsister. Dans ce travail, nous étudions l'existence éventuelle de conditions sur les perversités ou sur la stratification entraînant une invariance topologique de l'homologie d'intersection.

Pour cela, nous reprenons la méthode utilisée par H. King [11] pour démontrer cette invariance topologique, dans le cas des GM-perversités et des espaces localement coniques introduits par L. Siebenmann dans [17] et appelés CS-ensembles. À tout CS-ensemble,  $X$ , H. King associe, suivant un procédé qu'il attribue à D. Sullivan, un nouveau CS-ensemble noté  $X^*$ . Les CS-ensembles  $X$  et  $X^*$  ont même espace topologique sous-jacent mais des stratifications distinctes. L'idée directrice est d'éliminer les strates de  $X$  qui ne correspondent pas à sa topologie. Par exemple, prenons pour  $X$  une sphère stratifiée avec un point en filtration 0. Ce point particularisé a des voisinages homéomorphes à ceux de tout autre point de la sphère et il n'a donc aucun caractère singulier qui amène à le distinguer ; le CS-ensemble  $X^*$  associé est la sphère toute entière en stratification régulière. Revenons au cas général : deux CS-ensembles ayant même espace topologique sous-jacent ont le même CS-ensemble  $X^*$  associé, d'où le qualificatif intrinsèque pour ce dernier. L'invariance topologique dans le cadre des GM-perversités, équivaut alors au fait que, pour tout CS-ensemble  $X$ , les homologies d'intersection de  $X$  et de  $X^*$  sont isomorphes.

La question que nous abordons ici s'énonce donc : pour quelles perversités générales, a-t-on un isomorphisme entre les homologies d'intersection de  $X$  et de son CS-ensemble intrinsèque  $X^*$  ? Pour ce faire, nous définissons les K-perversités (Définition 6.7) qui donnent une condition suffisante, énoncée dans le Théorème B. Ce dernier recouvre l'invariance topologique des GM-perversités classiques et une invariance par raffinement dans le cas de perversités générales.

Comme complexe permettant de calculer l'homologie d'intersection, nous choisissons un complexe singulier construit sur des simplexes filtrés. Nous montrons dans le Théorème A qu'il redonne bien l'homologie d'intersection usuelle avec des perversités générales après avoir démontré l'existence d'une suite exacte de Mayer-Vietoris et l'invariance homotopique. Ces résultats seront utilisés dans un travail en cours d'écriture ([3]).

Pour terminer, signalons que, dans le cadre des GM-perversités et, par exemple, de coefficients réels, l'homologie d'intersection possède une dualité de Poincaré [9] et il existe un complexe adéquat de formes différentielles vérifiant une extension du classique théorème de de Rham, un résultat de M. Goresky et R. MacPherson cité dans [1, Proposition 1.2.6]. En dehors de ce rang de perversités, ces propriétés disparaissent. C'est le cas pour les perversités qui ne sont pas plus petites que la perversité maximale  $\bar{t}$ . Dans [16] (cf. aussi [7]) apparaît une modification de l'homologie d'intersection qui coïncide avec l'homologie d'intersection usuelle si  $\bar{p} \leq \bar{t}$ . Avec cette variation, appelée *homologie d'intersection modérée*, l'isomorphisme de de Rham (cf. [16]) et la dualité de Poincaré à coefficients dans un corps (cf. [8, 6]) subsistent sans restriction sur la perversité. Nous

présentons aussi une version filtrée de l'homologie d'intersection modérée et démontrons dans le Théorème C qu'elle est isomorphe à celle introduite dans les références citées.

L'idée directrice pour la définition de l'homologie modérée est d'éliminer les simplexes admissibles entièrement situés dans la partie singulière. Cette homologie ne peut être un invariant topologique car pour toute perversité strictement plus grande que la perversité maximale, l'homologie d'intersection est égale à l'homologie singulière relative de la pseudovariété et de son sous-espace singulier, cf Proposition 7.15. Cependant, nous pouvons montrer qu'il s'agit de la seule obstruction. Si le CS-ensemble considéré n'a pas de strate singulière qui devienne régulière dans le CS-ensemble intrinsèque associé, alors le résultat précédent sur l'homologie d'intersection reste valable, cf. Théorème D. En particulier, sous cette hypothèse et avec des K-perversités, l'homologie d'intersection modérée est invariante par raffinement de la stratification.

**Table des matières**

1. Espaces stratifiés.....	3
2. Perversités.....	6
3. Homologie d'intersection avec des simplexes filtrés. Théorème A.....	8
4. Suite exacte de Mayer-Vietoris.....	11
5. Démonstration du Théorème A.....	17
6. Une certaine invariance topologique. Théorème B.....	20
7. Homologie d'intersection modérée. Théorèmes C et D.....	28
Références.....	35

Sauf mention explicite, les divers groupes d'homologie apparaissant dans ce travail sont à coefficients dans un groupe abélien,  $G$ .

**1. Espaces stratifiés.**

Dans cette section, nous rappelons les définitions d'espaces stratifiés, de CS-ensembles, de pseudovariétés et quelques propriétés basiques les concernant.

Une pseudovariété possède, en particulier, une structure d'espace topologique filtré et cette généralité suffit à définir l'homologie d'intersection.

**Définition 1.1.** — Un *espace filtré*,  $(X, (X_i)_{0 \leq i \leq n})$ , est un espace topologique séparé,  $X$ , muni d'une filtration par des sous-espaces fermés,

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X,$$

telle que le complémentaire,  $X_n \setminus X_{n-1}$ , soit non vide. La *dimension formelle* de  $X$  est désignée par  $\dim X = n$ . L'indice  $i$  et la dimension formelle,  $\dim X$ , ne correspondent pas nécessairement à une notion géométrique de dimension.

Les composantes connexes,  $S$ , de  $X_i \setminus X_{i-1}$  sont les *strates* de  $X$  et nous posons  $\dim S = i$  et  $\text{codim } S = \dim X - \dim S$ . Les strates de  $X_n \setminus X_{n-1}$  sont appelées *régulières*; les autres sont dites *singulières*. Nous notons  $S_X$  l'ensemble des strates non vides de  $X$ . Le sous-espace  $X_{n-1}$  est *l'ensemble singulier*; il est parfois aussi noté  $\Sigma$ .

**Exemple 1.2.** — Soit  $(X, (X_i)_{0 \leq i \leq n})$  un espace filtré.

- Un ouvert  $U$  de  $X$  peut-être muni de la *filtration induite*, définie par  $U_i = U \cap X_i$ , qui en fait un espace filtré.
- Si  $M$  est une variété topologique, la *filtration produit*,  $((M \times X)_i)_{0 \leq i \leq n}$ , est définie par  $(M \times X)_i = M \times X_i$ . Elle fait de  $M \times X$  un espace filtré.
- Si  $X$  est compact, le cône ouvert  $\mathring{c}X = X \times [0, 1[ / X \times \{0\}$  peut-être muni de la *filtration conique*,  $(\mathring{c}X)_{0 \leq i \leq n+1}$  définie par  $(\mathring{c}X)_i = \mathring{c}X_{i-1}$ , avec la convention  $\mathring{c}\emptyset = \{\mathfrak{w}\}$ , où  $\mathfrak{w} = [-, 0]$  est le sommet du cône.

S'il n'y a pas de risque de confusion, nous notons également un espace filtré par la simple lettre,  $X$ . Pour avoir un bon comportement des applications continues, il nous faut enrichir la notion d'espace filtré, de la façon suivante.

**Définition 1.3.** — Un *espace stratifié* est un espace filtré dans lequel toute paire de strates,  $S$  et  $S'$ , telle que  $S \cap \overline{S'} \neq \emptyset$ , vérifie  $S \subset \overline{S'}$ .

L'ensemble des strates d'un espace stratifié est muni d'un ordre partiel ([6, Section 2.2.1]) ou ([4, Section A.2]) défini par  $S \preceq S'$  si  $S \subseteq \overline{S'}$ . On note  $S \prec S'$  si  $S \preceq S'$  et  $S \neq S'$ .

**Définition 1.4.** — Soit  $X$  un espace stratifié. La *profondeur d'une strate*  $S$  de  $X$  est le plus grand entier,  $m$ , tel qu'il existe une suite de strates,  $S = S_m \prec S_{m-1} \prec \cdots \prec S_0$ , avec  $S_i \neq S_j$  si  $i \neq j$ .

**Exemple 1.5.** — Si  $(X, (X_i)_{0 \leq i \leq n})$  est un espace stratifié, chaque construction de l'Exemple 1.2 est un espace stratifié.

**Définition 1.6.** — Une *application stratifiée*,  $f: (X, (X_j)_{0 \leq j \leq n}) \rightarrow (Y, (Y_j)_{0 \leq j \leq m})$ , est une application continue entre espaces stratifiés, telle que, pour chaque strate  $S \in \mathfrak{S}_X$ , il existe une (unique) strate  $S^f \in \mathfrak{S}_Y$  vérifiant  $f(S) \subset S^f$  et  $\text{codim } S^f \leq \text{codim } S$ . Une application stratifiée *préserve les strates* si  $n = m$  et  $f^{-1}Y_{n-\ell} = X_{n-\ell}$ , pour tout  $\ell \geq 0$ .

Notons qu'une application continue,  $f: X \rightarrow Y$ , est stratifiée, si, et seulement si, l'image réciproque de toute strate  $S'$  de  $Y$  est soit vide, soit une union de strates de  $X$  de codimension plus grande que celle de  $S'$ ; i.e.,  $f^{-1}(S') = \sqcup_{i \in I} S_i$ , avec  $\text{codim } S' \leq \text{codim } S_i$  pour tout  $i \in I$ . Remarquons qu'une application stratifiée envoie une strate régulière dans une strate régulière mais peut envoyer une strate singulière dans une strate régulière.

**Exemple 1.7.** — Les applications  $\text{pr}: M \times X \rightarrow X$ ,  $\iota_t: X \rightarrow \mathring{c}X$  avec  $x \mapsto (t, x)$ ,  $\iota_m: X \rightarrow M \times X$  avec  $x \mapsto (m, x)$  et l'injection canonique d'un ouvert,  $U \hookrightarrow X$ , apparaissant dans l'Exemple 1.2 sont des applications stratifiées.

Les propriétés basiques des applications stratifiées sont démontrées dans [4, Section A.2] et certainement déjà connues auparavant pour la plupart d'entre elles; nous les rappellerons au fur et à mesure. En particulier, mentionnons qu'elles respectent l'ordre sur les strates.

**Proposition 1.8** ([4, Proposition A.23]). — Une application stratifiée,  $f: X \rightarrow Y$ , induit une application croissante  $(\mathfrak{S}_X, \preceq) \rightarrow (\mathfrak{S}_Y, \preceq)$ ,  $S \mapsto S^f$ .

Rappelons la définition d'espace stratifié localement conique due à L. Siebenman, [17].

**Définition 1.9.** — Un *CS-ensemble* de dimension  $n$  est un espace filtré,

$$X_{-1} = \emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-2} \subseteq X_{n-1} \subsetneq X_n = X,$$

tel que, pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $X_i \setminus X_{i-1}$  est une variété topologique, de dimension  $i$  ou l'ensemble vide. De plus, pour chaque point  $x \in X_i \setminus X_{i-1}$ ,  $i \neq n$ , il existe

- (i) un voisinage ouvert,  $V$ , de  $x$  dans  $X$ , muni de la filtration induite,
- (ii) un voisinage ouvert,  $U$ , de  $x$  dans  $X_i \setminus X_{i-1}$ ,
- (iii) un espace filtré compact,  $L$ , de dimension formelle  $n - i - 1$ , dont le cône,  $\mathring{c}L$ , est muni de la filtration conique,  $(\mathring{c}L)_i = \mathring{c}L_{i-1}$ ,
- (iv) un homéomorphisme,  $\varphi: U \times \mathring{c}L \rightarrow V$ , tels que
  - (a)  $\varphi(u, \mathbf{w}) = u$ , pour tout  $u \in U$ , où  $\mathbf{w}$  désigne le sommet du cône,
  - (b)  $\varphi(U \times \mathring{c}L_j) = V \cap X_{i+j+1}$ , pour tout  $j \in \{0, \dots, n - i - 1\}$ .

Le couple  $(V, \varphi)$  est appelé *carte conique* de  $x$  et l'espace filtré,  $L$ , un *lien* de  $x$ . Un CS-ensemble est dit *normal* si les liens sont connexes.

Dans la définition précédente, les liens sont toujours des ensembles non vides. Par conséquent, l'ensemble  $X_n \setminus X_{n-1}$  est partout dense. Le fait qu'un CS-ensemble satisfait la condition imposée aux strates d'un espace stratifié se trouve, par exemple, dans [4, Theorem G]. Bien que n'étant généralement pas des CS-ensembles, les liens sont toujours des espaces filtrés. Remarquons aussi que les liens de points situés sur la même strate ne sont en général pas homéomorphes ; ils ont cependant même homologie d'intersection pour toute perversité, cf. [6, Chapter 5]. Si  $X$  est un CS-ensemble, alors tout ouvert de  $X$  et tout produit de  $X$  avec une variété topologique  $M$ , munis des structures induites de l'Exemple 1.2 sont des CS-ensembles. Il en est de même pour  $\mathring{c}X$  lorsque  $X$  est de plus compact.

Nous introduisons maintenant la définition originelle de pseudovariétés due à M. Goresky et R. MacPherson, [9], sans restriction sur l'existence de strates de codimension 1.

**Définition 1.10.** — Une *pseudovariété topologique de dimension  $n$*  (ou, plus simplement, une pseudovariété) est un CS-ensemble de dimension  $n$  dans lequel tous les liens,  $L$ , de points  $x \in X_i \setminus X_{i-1}$  sont des pseudovariétés topologiques de dimension  $(n - i - 1)$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Tout ouvert d'une pseudovariété est une pseudovariété. Le résultat suivant précise l'impact de l'hypothèse de paracompacité dans le cas des CS-ensembles.

**Proposition 1.11.** — *Un CS-ensemble paracompact est métrisable.*

*Démonstration.* — Soit  $X$  un CS-ensemble paracompact. D'après le théorème de métrisabilité de Y. Smirnov [18], avec l'hypothèse de paracompacité, il suffit de montrer que  $X$  est localement métrisable. Nous procédons par récurrence sur la profondeur du CS-ensemble. En dimension 0, c'est vrai car  $X$  est une variété topologique.

Supposons le résultat vrai jusqu'à la profondeur  $n - 1$  et soit  $X$  de profondeur  $n$ . Nous choisissons comme voisinage d'un point de  $X$  son voisinage conique,  $U \times \mathring{c}L$ , où  $U$  est une boule ouverte. Remarquons que  $U \times \mathring{c}L \setminus (U \times \mathbf{w}) = U \times L \times ]0, \infty[$  est un ouvert de  $X$  ;

c'est donc un CS-ensemble. Chacun des trois termes de ce produit étant une intersection dénombrable de compacts, l'espace  $U \times \mathring{c}L \setminus (U \times \mathfrak{w})$  est un CS-ensemble paracompact. Il est donc métrisable d'après l'hypothèse de récurrence.

Nous en déduisons, pour tout  $a > 0$ , la métrisabilité de  $U \times L \times [a, b]$  et, par homéomorphisme, celle de  $U \times L \times [0, 1]$ . Si  $B$  est la boule fermée de rayon moitié de celui de  $U$ , le produit  $B \times L \times [0, 1]$  est donc compact métrisable. L'image par une application continue d'un compact métrisable dans un espace de Hausdorff étant métrisable, nous avons obtenu la métrisabilité de  $B \times \mathring{c}L$  et, par homéomorphisme, celle de  $U \times \mathring{c}L$ .  $\square$

## 2. Perversités

L'outil fondamental de la théorie d'intersection est la notion de perversité qui contrôle le degré transverse aux strates d'un espace filtré. Nous en rappelons ici les diverses facettes.

Commençons par la définition de perversités telles qu'elles apparaissent dans [9] et que nous appelons *perversités classiques*, pour les distinguer de perversités plus générales, introduites dans [12], que nous désignons simplement par *perversités*.

**Définition 2.1.** — Une *perversité classique libre* (loose perversity dans [11]) est une application  $\bar{p}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $i \mapsto \bar{p}(i)$ , telle que  $\bar{p}(0) = 0$ . Une *perversité classique de King* est une perversité classique libre telle que

$$\bar{p}(i) \leq \bar{p}(i+1) \leq \bar{p}(i) + 1, \quad \text{pour tout } i \geq 1. \quad (1)$$

Une *perversité de Goresky-MacPherson* (ou *GM-perversité*) est une perversité classique libre vérifiant  $\bar{p}(1) = \bar{p}(2) = 0$  et la condition (1).

Par exemple, les superperversités de [7] sont des  $K$ -perversités vérifiant  $\bar{p}(2) > 0$ , de façon à couvrir le cas  $\bar{p}(2) = 1$  de [2]. Définissons maintenant des perversités plus générales. Contrairement aux perversités classiques, ces nouvelles perversités ne sont pas des applications définies indépendamment de toute référence à un espace filtré mais sont des applications liées à la décomposition en strates de l'espace filtré.

**Définition 2.2.** — Une *perversité sur un espace filtré*,  $(X, (X_i)_{0 \leq i \leq n})$ , est une application,  $\bar{p}_X: \mathcal{S}_X \rightarrow \mathbb{Z}$ , définie sur l'ensemble des strates de  $X$  et prenant la valeur 0 sur les strates régulières. Le couple  $(X, \bar{p}_X)$  est appelé *espace pervers*. Il est aussi noté  $(X, \bar{p})$  s'il n'y a pas de risque de confusion.

Si  $X$  est stratifié, ou un CS-ensemble, nous dirons que  $(X, \bar{p})$  est un *espace stratifié pervers* ou un *CS-ensemble pervers*.

Soit  $(X, (X_i)_{0 \leq i \leq n})$  un espace filtré. Une perversité classique libre au sens de la Définition 2.1 induit une perversité sur  $X$ , obtenue en posant  $\bar{p}(S) = \bar{p}(\text{codim } S)$ .

Si  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  sont deux perversités sur  $X$ , nous posons  $\bar{p} \leq \bar{q}$  si l'on a  $\bar{p}(S) \leq \bar{q}(S)$ , pour tout  $S \in \mathcal{S}_X$ . Rappelons que le treillis des GM-perversités admet un élément maximal,  $\bar{t}$ , appelé *perversité maximale* et défini par  $\bar{t}(i) = i - 2$ , si  $i \geq 2$ . Par extension, on notera aussi  $\bar{t}$  la perversité sur un espace filtré,  $X$ , définie par  $\bar{t}(S) = \text{codim } S - 2$  si  $S$  est une strate singulière. La perversité  $D\bar{p}$ , définie par  $D\bar{p} + \bar{p} = \bar{t}$ , est appelée *perversité duale de  $\bar{p}$* . La *perversité nulle*, notée  $\bar{0}$ , est définie par  $\bar{0}(S) = 0$ , pour tout  $S \in \mathcal{S}_X$ .

**Définition 2.3.** — Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application stratifiée. À toute perversité,  $\bar{q}$ , sur  $Y$ , on associe une perversité sur  $X$ , appelée *perversité image réciproque par  $f$* , et définie par  $(f^*\bar{q})(S) = \bar{q}(S^f)$ , pour toute strate  $S \in \mathcal{S}_X$ .

**Exemple 2.4.** — Reprenons les constructions de l'Exemple 1.2 à partir d'un espace stratifié pervers,  $(X, \bar{p})$ .

- Tout ouvert  $U$  est muni d'une structure d'espace stratifié pervers, pour la filtration induite et la perversité image réciproque de  $\bar{p}$  par l'inclusion canonique  $U \hookrightarrow X$ , notée aussi  $\bar{p}$ .
- Le produit  $X \times M$  est un espace stratifié pervers pour la filtration produit et la perversité image réciproque de  $\bar{p}$  par la projection canonique  $X \times M \rightarrow X$ , notée aussi  $\bar{p}$ .
- Si  $X$  est un espace stratifié compact, les strates sur le cône ouvert,  $\mathring{c}X$ , ont été définies dans l'Exemple 1.2 par

$$\mathcal{S}_{\mathring{c}X} = \{S \times ]0, 1[ \mid S \in \mathcal{S}_X\} \cup \{\{\mathbf{w}\}\}.$$

Ainsi, toute perversité,  $\bar{p}$ , sur  $\mathring{c}X$  induit une perversité sur  $X$ , toujours notée  $\bar{p}$  et définie par  $\bar{p}(S) = \bar{p}(S \times ]0, 1[)$ .

Terminons avec la notion d'homotopie entre applications stratifiées, dans laquelle le produit  $X \times [0, 1]$  est muni de la filtration produit et de la perversité image réciproque par la projection canonique  $X \times [0, 1] \rightarrow X$ .

**Définition 2.5.** — Deux applications stratifiées entre espaces stratifiés pervers,  $f, g: (X, \bar{p}) \rightarrow (Y, \bar{q})$ , sont *homotopes* s'il existe une application stratifiée entre espaces stratifiés pervers,  $\varphi: (X \times [0, 1], \bar{p}) \rightarrow (Y, \bar{q})$ , telle que  $\varphi(-, 0) = f$  and  $\varphi(-, 1) = g$ .

L'homotopie est une relation d'équivalence et une notion d'équivalence d'homotopie entre espaces stratifiés pervers découle naturellement de cette définition.

**Remarque 2.6.** — Considérons le résultat classique suivant : les actions libres du cercle,  $S^1$ , sur un espace topologique,  $X$ , sont classifiés par les espaces d'orbites,  $B = X/S^1$ , et les classes d'Euler  $e \in H^2(B; \mathbb{Z})$ . L'extension au cadre des actions non libres du cercle est menée dans [14], [15], [13], via une classe d'Euler appartenant à un groupe de cohomologie d'intersection  $e \in H_e^2(B; \mathbb{R})$ . En particulier, dans [14], il est montré que, pour une certaine classe d'actions du cercle, l'espace stratifié,  $B$ , et la classe d'Euler,  $e$ , déterminent la cohomologie d'intersection de  $X$ , pour toute perversité  $\bar{p}$ . La perversité,  $\bar{e}$ , qui permet ce résultat n'est pas une perversité classique ; elle prend les valeurs 0, 1 ou 2, suivant le type d'action de  $S^1$  sur la strate considérée :

- $\bar{e}(S) = 0$  si la strate  $S$  n'a pas de points fixes,
- $\bar{e}(S) = 1$  si la strate  $S$  est constitué de points fixes et si  $S^1$  agit trivialement sur le lien  $L_S$  de  $S$ ,
- $\bar{e}(S) = 2$  sur les autres strates.

Cet exemple illustre l'intérêt d'une définition d'homologie d'intersection pour des perversités plus générales que les perversités classiques.



### 3. Homologie d'intersection avec des simplexes filtrés. Théorème A

Nous présentons ici deux complexes singuliers calculant l'homologie d'intersection de M. Goresky et R. MacPherson ([9]). Le premier de ces complexes est dû à H. King; le deuxième est déjà apparu dans plusieurs travaux du deuxième auteur, cf. [16] par exemple.

Commençons par la notion de simplexe singulier admissible telle qu'elle apparaît chez R. MacPherson, [12].

**Définition 3.1.** — Soit  $(X, \bar{p})$  un espace pervers. Un simplexe singulier,  $\sigma: \Delta \rightarrow X$ , est  $\bar{p}$ -admissible si, pour toute strate  $S \in \mathcal{S}_X$ , l'image réciproque,  $\sigma^{-1}(S)$ , est incluse dans le squelette de  $\Delta$  de dimension

$$\dim \Delta - \operatorname{codim} S + \bar{p}(S). \quad (2)$$

Une chaîne singulière,  $\xi$ , à coefficients dans un groupe abélien  $G$ , est de  $\bar{p}$ -intersection si tout simplexe à coefficient non nul dans  $\xi$  et  $\partial\xi$  est  $\bar{p}$ -admissible. Notons  $I^{\bar{p}}C_*(X; G)$  le complexe des chaînes de  $\bar{p}$ -intersection et  $I^{\bar{p}}H_*(X; G)$  son homologie.

Notons que la condition de  $\bar{p}$ -admissibilité est satisfaite pour toute strate régulière,  $S$ , car cette dernière vérifie  $\operatorname{codim} S = \bar{p}(S) = 0$ . Définissons maintenant une notion de simplexe filtré, plus adaptée à une approche simpliciale.

**Définition 3.2.** — Soit  $(X, (X_i)_{0 \leq i \leq n})$  un espace filtré. Un *simplexe filtré* est une application continue,  $\sigma: \Delta \rightarrow X$ , de source un simplexe euclidien muni d'une décomposition  $\Delta = \Delta_0 * \Delta_1 * \cdots * \Delta_n$ , appelée  $\sigma$ -décomposition de  $\Delta$ , vérifiant

$$\sigma^{-1}X_i = \Delta_0 * \Delta_1 * \cdots * \Delta_i,$$

pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Les dimensions des simplexes  $\Delta_i$  de la  $\sigma$ -décomposition mesurent le défaut de transversalité du simplexe  $\sigma$  relativement aux strates de  $X$ . Ces simplexes  $\Delta_i$  peuvent être vides, avec la convention  $\emptyset * Y = Y$ , pour tout espace  $Y$ . Remarquons aussi qu'un simplexe singulier  $\sigma: \Delta \rightarrow X$  est filtré si chaque  $\sigma^{-1}(X_i)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ , est une face de  $\Delta$  ou l'ensemble vide.

**Définition 3.3.** — Considérons un espace pervers,  $(X, (X_i)_{0 \leq i \leq n}, \bar{p})$ , et un simplexe filtré,  $\sigma: \Delta = \Delta_0 * \cdots * \Delta_n \rightarrow X$ .

- (i) Le *degré pervers du simplexe*  $\sigma$  est le  $(n+1)$ -uplet,  $\|\sigma\| = (\|\sigma\|_0, \dots, \|\sigma\|_n)$ , où  $\|\sigma\|_i = \dim \sigma^{-1}X_{n-i} = \dim(\Delta_0 * \cdots * \Delta_{n-i})$ , avec la convention  $\dim \emptyset = -\infty$ .
- (ii) Pour toute strate  $S$  de  $X$ , le *degré pervers du simplexe*  $\sigma$  le long de la strate  $S$  est défini par

$$\|\sigma\|_S = \begin{cases} -\infty, & \text{si } S \cap \sigma(\Delta) = \emptyset, \\ \|\sigma\|_{\operatorname{codim} S}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (iii) Pour toute strate  $S$  de  $X$ , le *degré pervers de la chaîne*  $\xi = \sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_j$ ,  $\lambda_j \in G$ , le long de la strate  $S$  est défini par

$$\|\xi\|_S = \max_{j \in J} \|\sigma_j\|_S.$$

Nous désignons par  $\|\xi\|$  l'application qui associe  $\|\xi\|_S$  à toute strate singulière  $S$  de  $X$ .

**Remarque 3.4.** — Soit  $\sigma: \Delta \rightarrow X$  un simplexe filtré d'un espace filtré et soit  $S$  une strate de  $X$ . Si  $\sigma^{-1}(S)$  est différent de l'ensemble vide, on note  $F_S$  la plus petite face de  $\Delta$  contenant  $\sigma^{-1}(S)$ . D'après la Définition 3.1, le simplexe filtré  $\sigma$  est  $\bar{p}$ -admissible si, et seulement si, on a  $\sigma^{-1}(S) = \emptyset$  ou  $\dim F_S \leq \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S)$ , pour toute strate  $S$  de  $X$ .

Si la strate  $S$  est de codimension  $i$ , nous avons montré, dans [4, Lemme A.24], que l'on a toujours,  $\sigma^{-1}(S) = \emptyset$  ou  $\sigma^{-1}(S) = \Delta_0 * \cdots * \Delta_{n-i} \setminus \Delta_0 * \cdots * \Delta_{n-i-1}$ . Dans le deuxième cas, de  $\dim F_S = \|\sigma\|_i = \|\sigma\|_S$ , on déduit alors,

$$\sigma \text{ est } \bar{p}\text{-admissible} \iff \|\sigma\|_S \leq \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S), \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}_X. \quad (3)$$

**Définition 3.5.** — Si  $(X, \bar{p})$  est un espace pervers, nous notons  $C_*^{\bar{p}}(X; G)$  le complexe des chaînes de  $\bar{p}$ -intersection constituées de combinaisons linéaires de simplexes filtrés. Son homologie est appelée *homologie de  $\bar{p}$ -intersection*, à coefficients dans le groupe abélien  $G$ , et notée  $H_*^{\bar{p}}(X; G)$ .

Cette appellation est justifiée par le fait que, pour des pseudovariétés,  $X$ , cette homologie est naturellement isomorphe à  $I^{\bar{p}}H_*(X; G)$ .

**Théorème A.** — Soit  $(X, \bar{p})$  un CS-ensemble pervers. L'inclusion canonique  $C_*^{\bar{p}}(X; G) \hookrightarrow I^{\bar{p}}C_*(X; G)$  est un morphisme de chaînes induisant un isomorphisme en homologie,  $H_*^{\bar{p}}(X; G) \cong I^{\bar{p}}H_*(X; G)$ .

Si  $\bar{p}$  est une perversité classique, ce théorème est la Proposition A.29 de [4]. Avec des perversités générales, une version légèrement différente se trouve aussi dans [16, Proposition 2.4.1], où les simplexes admissibles sont définis à partir de l'existence d'un éclatement de l'espace  $X$  lui-même. L'existence d'un tel éclatement nécessitant des hypothèses particulières sur l'espace  $X$  (comme, par exemple, le fait d'être un espace de Thom-Mather), nous donnons dans la Section 5, une démonstration du Théorème A, valable sans cette restriction.

Terminons cette section avec quelques propriétés du complexe  $C_*^{\bar{p}}(X; G)$ .

**Proposition 3.6.** — Toute application stratifiée entre espaces stratifiés pervers,  $f: (X, \bar{p}) \rightarrow (Y, \bar{q})$ , vérifiant l'inégalité  $f^*D\bar{q} \leq D\bar{p}$  entre les perversités duales, induit un morphisme de chaînes,  $f_*: C_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow C_*^{\bar{q}}(Y; G)$ , défini au niveau des simplexes filtrés par  $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ .

Remarquons que, l'application  $f$  étant stratifiée, l'inégalité  $\bar{p} \leq f^*\bar{q}$  entraîne  $f^*D\bar{q} \leq D\bar{p}$ .

*Démonstration.* — L'application  $f_*$  étant compatible à la différentielle, il suffit de montrer que

$$\text{l'image d'un simplexe } \bar{p}\text{-admissible est un simplexe } \bar{q}\text{-admissible.} \quad (4)$$

Soit  $\sigma: \Delta = \Delta_0 * \cdots * \Delta_n \rightarrow X$  un simplexe filtré  $\bar{p}$ -admissible, c'est-à-dire vérifiant

$$\|\sigma\|_S \leq \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S), \quad (5)$$

pour toute strate  $S$  de  $X$ . Soit  $T$  une strate de  $Y$ , il nous faut montrer

$$\|f \circ \sigma\|_T \leq \dim \Delta - \operatorname{codim} T + \bar{q}(T). \quad (6)$$

Si  $(f \circ \sigma)(\Delta) \cap T = \emptyset$  alors  $\|f \circ \sigma\|_T = -\infty$  et l'inégalité (6) est vérifiée. Supposons donc  $(f \circ \sigma)(\Delta) \cap T \neq \emptyset$ . Par définition d'application stratifiée, on sait que  $f^{-1}(T) = \sqcup_{i \in I} S_i$ , avec  $\operatorname{codim} T \leq \operatorname{codim} S_i$ , pour tout  $i \in I$ . L'hypothèse  $(f \circ \sigma)(\Delta) \cap T \neq \emptyset$  implique l'existence d'une strate  $S_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ , avec  $\sigma(\Delta) \cap S_\alpha \neq \emptyset$ , d'où, avec les notations de la Définition 1.6,  $S_\alpha^f = T$ . Il s'ensuit,

$$\begin{aligned} \|f \circ \sigma\|_{\operatorname{codim} T} &\leq \|f \circ \sigma\|_{\operatorname{codim} S_\alpha} \leq \|\sigma\|_{\operatorname{codim} S_\alpha} \\ &\leq \dim \Delta - \operatorname{codim} S_\alpha + \bar{p}(S_\alpha) \leq \dim \Delta - D\bar{p}(S_\alpha) + 2 \\ &\leq \dim \Delta - f^*D\bar{q}(S_\alpha) + 2 \leq \dim \Delta - D\bar{q}(T) + 2 \\ &\leq \dim \Delta - \operatorname{codim} T + \bar{q}(T), \end{aligned}$$

où l'on a développé les définitions de perversités duales et utilisé, successivement, la Définition 3.2, [4, Theorem F], l'hypothèse (5), l'hypothèse  $f^*D\bar{q} \leq D\bar{p}$  et la Définition 2.3. L'inégalité (6) est donc établie.  $\square$

**Remarque 3.7.** — Dans la preuve précédente, les strates  $T \subset Y$  régulières n'interviennent pas. En conséquence, l'hypothèse  $f^*D\bar{q} \leq D\bar{p}$  doit être vérifiée seulement pour les strates  $S$  de  $X$  envoyées sur une strate singulière. (Ces strates  $S$  sont alors obligatoirement singulières.)

**Proposition 3.8.** — Soit  $\varphi: (X \times [0, 1], \bar{p}) \rightarrow (Y, \bar{q})$  une homotopie entre deux applications stratifiées,  $f, g: (X, \bar{p}) \rightarrow (Y, \bar{q})$ . Si l'homotopie vérifie l'inégalité,  $\varphi^*D\bar{q} \leq D\bar{p}$ , alors les applications  $f$  et  $g$  induisent la même application en homologie,

$$f_* = g_*: H_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow H_*^{\bar{q}}(Y; G).$$

*Démonstration.* — Notons  $\iota_0, \iota_1: X \rightarrow X \times [0, 1]$ , les injections canoniques définies par  $\iota_k(x) = (x, k)$  pour  $k = 0, 1$ . L'homotopie  $\varphi$  vérifie  $f = \varphi \circ \iota_0$  et  $g = \varphi \circ \iota_1$  et, d'après la Proposition 3.6, elle induit un homomorphisme,  $\varphi_*: H_*^{\bar{p}}(X \times [0, 1]; G) \rightarrow H_*^{\bar{q}}(Y; G)$ . Il suffit donc de montrer  $\iota_{0,*} = \iota_{1,*}: H_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow H_*^{\bar{p}}(X \times [0, 1]; G)$ .

Soit  $\sigma: \Delta^m = \langle e_0, \dots, e_m \rangle \rightarrow X$  un simplexe filtré,  $\bar{p}$ -admissible. En notant  $a_j = (e_j, 0)$  et  $b_j = (e_j, 1)$  les sommets de  $\Delta^m \times [0, 1]$ , on définit une  $(m+1)$ -chaîne de  $\Delta^m \times [0, 1]$  par

$$P = \sum_{j=0}^m (-1)^j \langle a_0, \dots, a_j, b_j, \dots, b_m \rangle.$$

Celle-ci engendre une homotopie de chaînes,  $h: C_*(X) \rightarrow C_{*+1}(X \times [0, 1])$ , entre  $\iota_{0,*}$  et  $\iota_{1,*}$ , définie par  $\sigma \mapsto (\sigma \times \operatorname{id})_*(P)$ . Pour tout  $j \in \{0, \dots, m\}$ , nous notons  $\tau_j: \Delta^{m+1} = \langle v_0, \dots, v_m \rangle \rightarrow \Delta^m \times [0, 1]$ , le  $m$ -simplexe défini par  $(v_0, \dots, v_{m+1}) \mapsto (a_0, \dots, a_j, b_j, \dots, b_m)$ . Par construction, nous avons  $\Delta^m \times [0, 1] = \cup_{j=0}^m \tau_j(\Delta^{m+1})$ . Pour toute strate  $S$  de  $X$ , on a

$$\tau_j^{-1}(\sigma \times \operatorname{id})^{-1}(S \times [0, 1]) = \tau_j^{-1}(\sigma^{-1}(S) \times [0, 1]) \subset \sigma^{-1}(S) \times [0, 1],$$

d'où l'on déduit les inégalités,

$$\|(\sigma \times \operatorname{id}) \circ \tau_j\|_{S \times [0, 1]} \leq \|\sigma\|_S + 1 \leq m - \operatorname{codim} S + \bar{p}(S) + 1.$$

Il s'ensuit,

$$\begin{aligned} \|h(\sigma)\|_{S \times [0,1]} &\leq \max_j \|(\sigma \times \text{id}) \circ \tau_j\|_{S \times [0,1]} \leq m - \text{codim } S + \bar{p}(S) + 1 \\ &\leq \dim \Delta^{m+1} - \text{codim } (S \times [0,1]) + \bar{p}(S \times [0,1]). \end{aligned}$$

Toute strate de  $X \times [0,1]$  étant de la forme  $S \times [0,1]$ , avec  $S$  une strate de  $X$ , nous avons démontré que  $h(\sigma)$  est  $\bar{p}$ -admissible.  $\square$

Si  $(X, \bar{p})$  est un espace pervers, on munit le produit  $\mathbb{R} \times X$  des filtrations et perversités définies dans les Exemples 1.2 et 2.4. La perversité sur le produit est encore notée  $\bar{p}$ . Dans la démonstration précédente, nous avons également établi le résultat suivant.

**Corollaire 3.9.** — *Soit  $(X, \bar{p})$  un espace stratifié pervers. Alors, les inclusions  $\iota_z: X \hookrightarrow \mathbb{R} \times X$ ,  $x \mapsto (z, x)$  avec  $z \in \mathbb{R}$  fixé, et la projection  $p_X: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ ,  $(z, x) \mapsto x$ , induisent des isomorphismes,  $H_k^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X; G) \cong H_k^{\bar{p}}(X; G)$ .*

**Remarque 3.10.** — Nous reprenons ici une remarque de H. King ([11]) aussi présente dans [4, Remark A.31]. Pour un espace filtré,  $X$ , et un simplexe  $\sigma: \Delta \rightarrow X$ , il existe deux définitions possibles de  $\bar{p}$ -admissibilité pour une perversité classique,  $\bar{p}$  :

- (a) demander que  $\sigma^{-1}(X_{n-j})$  soit inclus dans le squelette de  $\Delta$  de dimension  $\dim \Delta - j + \bar{p}(j)$ ,
- (b) ou demander que  $\sigma^{-1}(X_{n-j} \setminus X_{n-j-1})$  soit inclus dans le squelette de  $\Delta$  de dimension  $\dim \Delta - j + \bar{p}(j)$ .

Observons que (b) se traduit par une suite indépendante d'inclusions, ce qui n'est pas le cas pour (a). En effet, dans la condition (a) le sous-espace  $X_{n-j}$  est présent dans toutes les inégalités faisant intervenir  $X_{n-k}$  avec  $k \leq j$ . On vérifie facilement que les conditions (b) impliquent les conditions (a) mais que l'équivalence entre (a) et (b) nécessite des hypothèses supplémentaires sur la perversité  $\bar{p}$ . Par exemple, c'est le cas si  $\bar{p}$  est une perversité de King.

Dans [4, Appendix], nous avons choisi la définition (a), qui est également celle de [11]. Dans le cadre des perversités générales, la définition de  $\bar{p}$ -admissibilité oblige à raisonner strate par strate, ce qui correspond à la condition (b). Cette remarque explique pourquoi certains résultats obtenus ici peuvent différer de ceux de [4, Appendix]. Par exemple, le calcul de l'homologie du cône fait dans la Proposition 5.2 ne nécessite aucune hypothèse sur la perversité  $\bar{p}$ , contrairement à [4, Proposition A.14] où la condition  $\bar{p}$  perversité de King est requise.

#### 4. Suite exacte de Mayer-Vietoris

Dans cette section, nous construisons une suite exacte de Mayer-Vietoris pour l'homologie d'intersection  $H_*^{\bar{p}}(X; G)$ . C'est un des points clés dans la preuve du Théorème A.

**Proposition 4.1 (Suite de Mayer-Vietoris).** — *Pour tout espace pervers,  $(X, \bar{p})$ , et tout recouvrement ouvert,  $\{U, V\}$ , de  $X$ , il existe une suite exacte longue,*

$$\dots \rightarrow H_i^{\bar{p}}(U \cap V; G) \rightarrow H_i^{\bar{p}}(U; G) \oplus H_i^{\bar{p}}(V; G) \rightarrow H_i^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow H_{i-1}^{\bar{p}}(U \cap V; G) \rightarrow \dots$$

Le connectant de cette suite exacte longue est donné par  $\delta_h(\xi) = [\partial\xi_U]$ , où  $\xi_U$  s'obtient à partir de l'opérateur de subdivision,  $\text{sd}^k\xi = \xi_U + \xi_V \in C_*^{\bar{p}}(U) + C_*^{\bar{p}}(V)$ , cf. (9).

Avant de démontrer ce résultat, il nous faut analyser les simplexes  $\bar{p}$ -admissibles qui ne sont pas de  $\bar{p}$ -intersection. Ceci provient bien entendu du fait que les faces d'un simplexe admissible ne sont pas toujours admissibles. Nous suivons la méthode de preuve utilisée dans [4, Proposition A.14.(i)], l'idée directrice étant que le défaut de  $\bar{p}$ -admissibilité du bord d'un simplexe  $\bar{p}$ -admissible est concentré dans une seule face.

**Définition 4.2.** — Soit  $\sigma: \Delta^m \rightarrow X$  un simplexe filtré  $\bar{p}$ -admissible de dimension  $m$  d'un espace pervers,  $(X, \bar{p})$ . Pour toute strate,  $S$ , de  $X$  telle que  $\sigma^{-1}(S) \neq \emptyset$ , on note  $F_S$  la plus petite face de  $\Delta$  contenant  $\sigma^{-1}(S)$ . La face  $\bar{p}$ -funeste de  $\sigma$  est la restriction  $\sigma: T_{\bar{p}}(\sigma) \rightarrow X$  où

$$T_{\bar{p}}(\sigma) = \min\{F_S \mid S \in \mathcal{S}_X, F_S \neq \Delta^m \text{ et } \dim F_S = m - \text{codim } S + \bar{p}(S)\},$$

si cette famille est non vide. Par extension, la face  $T_{\bar{p}}(\sigma)$  de  $\Delta^m$  est aussi appelée *face  $\bar{p}$ -funeste* de  $\sigma$ . Si  $T_{\bar{p}}(\sigma)$  existe, la strate  $S$  vérifiant  $T_{\bar{p}}(\sigma) = F_S$  est appelée *strate  $\bar{p}$ -coupable* de  $\sigma$ .

La famille de faces  $\{F_S\}$  ci-dessus étant une famille totalement ordonnée, la définition de  $T_{\bar{p}}(\sigma)$  a bien un sens.

**Remarque 4.3.** — Si la strate  $S$  est de codimension 0, c'est-à-dire régulière, alors on a  $\bar{p}(S) = 0 = \text{codim } S$  et l'inégalité  $\dim \Delta < m$  dans la Définition 4.2 ne peut jamais être vérifiée. Une strate régulière ne peut donc être  $\bar{p}$ -coupable, pour toute perversité  $\bar{p}$ .

**Proposition 4.4.** — Soit  $\sigma: \Delta \rightarrow X$  un simplexe filtré  $\bar{p}$ -admissible d'un espace pervers,  $(X, \bar{p})$ .

- (a) Une face,  $s$ , de codimension 1 de  $\sigma$  n'est pas  $\bar{p}$ -admissible si, et seulement si,  $\sigma$  admet une face  $\bar{p}$ -funeste incluse dans  $s$ .
- (b) Soit  $\sigma': \Delta \rightarrow X$  un autre simplexe  $\bar{p}$ -admissible. Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  ont en commun une même face de codimension 1,  $\sigma''$ , non  $\bar{p}$ -admissible, alors  $\sigma$  et  $\sigma'$  ont la même face  $\bar{p}$ -funeste. De plus, cette dernière est une face de  $\sigma''$ .
- (c) Le simplexe  $\sigma$  est de  $\bar{p}$ -intersection si, et seulement si, il ne possède pas de face  $\bar{p}$ -funeste.

*Démonstration.* — (a) Soit  $s: \nabla \rightarrow X$  une face de codimension 1 de  $\sigma$ .

• Supposons tout d'abord que la face  $s$  n'est pas  $\bar{p}$ -admissible. Il existe donc une strate  $S \in \mathcal{S}_X$  telle que  $s^{-1}(S)$  ne soit pas inclus dans le squelette de  $\nabla$  de dimension  $\dim \nabla - \text{codim } S + \bar{p}(S)$ . Remarquons que  $s^{-1}(S) \neq \emptyset$  et donc  $\sigma^{-1}(S) \neq \emptyset$ . Rappelons que  $F_S$  est la plus petite face de  $\Delta$  contenant  $\sigma^{-1}(S)$ . Le simplexe  $\sigma$  étant  $\bar{p}$ -admissible, nous avons

$$\dim(F_S \cap \nabla) \leq \dim F_S \leq \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S).$$

D'autre part,  $F_S \cap \nabla$  étant une face contenant  $s^{-1}(S)$  et le simplexe  $s$  n'étant pas  $\bar{p}$ -admissible, nous pouvons écrire

$$\dim(F_S \cap \nabla) \geq \dim \nabla + 1 - \text{codim } S + \bar{p}(S) = \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S).$$

Il s'ensuit,  $\dim(F_S \cap \nabla) = \dim F_S = \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S)$  et  $F_S \subset \nabla$ , ce qui prouve  $T_{\bar{p}}(\sigma) \subset \nabla$ .

• Réciproquement, supposons que la face  $\bar{p}$ -funeste de  $\sigma$  existe et vérifie  $T_{\bar{p}}(\sigma) \subset \nabla$ . Il existe donc une strate  $S \in \mathcal{S}_X$  telle que la plus petite face,  $F_S$ , de  $\Delta$  contenant  $\sigma^{-1}(S)$  vérifie

$$F_S \subset \nabla \text{ et } \dim F_S = \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S).$$

De  $\sigma^{-1}(S) \subset F_S \subset \nabla$ , on déduit  $\sigma^{-1}(S) = s^{-1}(S)$ . Ainsi,  $F_S$  est aussi la plus petite face de  $\nabla$  contenant  $s^{-1}(S)$  et de

$$\dim F_S = \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S) > \dim \nabla - \text{codim } S + \bar{p}(S),$$

on déduit que le simplexe,  $s$ , n'est pas  $\bar{p}$ -admissible.

(b) Soit  $S \in \mathcal{S}_X$  vérifiant  $F_S = T_{\bar{p}}(\sigma)$ . Nous venons de montrer que  $F_S \subset \nabla$  et  $\emptyset \neq \sigma^{-1}(S) = \sigma''^{-1}(S) \subset \sigma'^{-1}(S)$ . Notons  $F'_S$  la plus petite face de  $\Delta$  contenant  $\sigma'^{-1}(S)$ . Elle contient aussi  $T_{\bar{p}}(\sigma)$  et l'on a, par  $\bar{p}$ -admissibilité de  $\sigma'$ ,

$$\dim F'_S \leq \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S) = \dim T_{\bar{p}}(\sigma).$$

Il s'ensuit  $T_{\bar{p}}(\sigma) = F'_S$  et  $\dim F'_S = \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S)$ . Par définition de face  $\bar{p}$ -funeste, nous en déduisons  $T_{\bar{p}}(\sigma') \subset F'_S$  et donc  $T_{\bar{p}}(\sigma') \subset T_{\bar{p}}(\sigma)$ . Les simplexes  $\sigma$  et  $\sigma'$  jouant des rôles symétriques, nous obtenons  $T_{\bar{p}}(\sigma') = T_{\bar{p}}(\sigma)$ . Le fait que  $T_{\bar{p}}(\sigma)$  soit une face de  $\sigma''$  est une conséquence du point (a).

(c) Si le simplexe  $\sigma$  admet une face  $\bar{p}$ -funeste, cette dernière est, par définition, incluse dans un simplexe de son bord. Le résultat découle alors du point (a).  $\square$

**Définition 4.5.** — Soit  $\sigma: \Delta \rightarrow X$  un simplexe filtré  $\bar{p}$ -admissible d'un espace pervers,  $(X, \bar{p})$ . Le  $\bar{p}$ -défaut de  $\sigma$  est l'entier  $\ell_{\bar{p}}(\sigma)$ , défini par

- $\ell_{\bar{p}}(\sigma) = 0$  si  $\sigma$  est de  $\bar{p}$ -intersection,
- $\ell_{\bar{p}}(\sigma) = \text{codim } S$ , si  $S$  est la strate  $\bar{p}$ -coupable de  $\sigma$ .

Le  $\bar{p}$ -défaut d'une chaîne  $\bar{p}$ -admissible,  $\xi = \sum_{j \in J} n_j \sigma_j$ , est l'entier  $\ell_{\bar{p}}(\xi)$ , défini par

- $\ell_{\bar{p}}(\xi) = \max\{\ell_{\bar{p}}(\sigma_j) \mid j \in J \text{ et } n_j \neq 0\}$  si  $\xi \neq 0$ ,
- $\ell_{\bar{p}}(0) = -1$ .

**Remarque 4.6.** — La Remarque 4.3 implique :  $\ell_{\bar{p}}(\sigma) = 0$  si, et seulement si, le simplexe filtré  $\sigma$  est de  $\bar{p}$ -intersection.

**Proposition 4.7.** — Soit  $\sigma: \Delta \rightarrow X$  un simplexe filtré  $\bar{p}$ -admissible d'un espace pervers,  $(X, \bar{p})$ . Alors, tout simplexe linéaire injectif,  $\zeta: \nabla \rightarrow \Delta$ , avec  $\dim \nabla = \dim \Delta$ , vérifie  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) \leq \ell_{\bar{p}}(\sigma)$ . De plus, si  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) \geq 1$ , l'implication suivante est vérifiée,

$$\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) = \ell_{\bar{p}}(\sigma) \Rightarrow \text{Im } \zeta \cap T_{\bar{p}}(\sigma) \neq \emptyset.$$

*Démonstration.* — Posons  $\mathcal{S}_1 = \{S \in \mathcal{S}_X \mid \sigma^{-1}(S) \neq \emptyset\}$  et  $\mathcal{S}_2 = \{S \in \mathcal{S}_X \mid (\sigma \circ \zeta)^{-1}(S) \neq \emptyset\}$ . Nous avons évidemment  $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$ .

Commençons par vérifier l'inégalité,  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) \leq \ell_{\bar{p}}(\sigma)$ . Le résultat est clair si  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) = 0$ . Supposons maintenant  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) \geq 1$  et soit  $S \in \mathcal{S}_2$  la strate  $\bar{p}$ -coupable de  $\zeta \circ \sigma$ . Notons  $H_S$  la plus petite face de  $\nabla$  contenant  $(\sigma \circ \zeta)^{-1}(S)$  et  $F_S$  la plus petite face de  $\Delta$  contenant  $\sigma^{-1}(S)$ . De  $H_S \subset \zeta^{-1}(F_S)$  et de l'injectivité de  $\zeta$ , on déduit  $\dim H_S \leq \dim F_S$ . Par choix de  $S$ , on a l'égalité  $\dim H_S = \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S)$ . Elle implique  $\dim F_S = \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S)$  car le simplexe  $\sigma$  est  $\bar{p}$ -admissible. Avec  $\dim \Delta >$

$\dim H_S = \dim F_S$ , on déduit l'existence d'une strate  $\bar{p}$ -coupable de  $\sigma$ , notée  $S' \in \mathcal{S}_1$ . Donc la face  $F_{S'}$  existe et vérifie  $F_{S'} = \Delta_0 \times \cdots \times \Delta_{n-\ell'} \subset F_S = \Delta_0 \times \cdots \times \Delta_{n-\ell}$ . Il s'ensuit  $n - \text{codim } S' \leq n - \text{codim } S$  et  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) = \text{codim } S \leq \text{codim } S' = \ell_{\bar{p}}(\sigma)$ .

Finalement, si  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) \geq 1$ , l'égalité  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) = \ell_{\bar{p}}(\sigma)$  implique  $S' = S$  et  $T_{\bar{p}}(\sigma) = F_S$ . Il s'ensuit

$$\text{Im}(\zeta) \cap T_{\bar{p}}(\sigma) \supset \zeta(H_S) \cap F_S = \zeta(H_S) \neq \emptyset.$$

□

*Démonstration de la Proposition 4.1.* — Considérons la suite exacte courte,

$$0 \rightarrow C_{*}^{\bar{p}}(U \cap V) \rightarrow C_{*}^{\bar{p}}(U) \oplus C_{*}^{\bar{p}}(V) \xrightarrow{\varphi} C_{*}^{\bar{p}}(U) + C_{*}^{\bar{p}}(V) \rightarrow 0,$$

dans laquelle le morphisme de chaînes,  $\varphi$ , est défini par  $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ . La suite exacte longue que l'on cherche est une conséquence directe de la propriété :

$$\text{“l'inclusion } \text{Im } \varphi \hookrightarrow C_{*}^{\bar{p}}(X) \text{ induit un isomorphisme en homologie.”} \quad (7)$$

Notons  $C_{*}(X)$  le complexe de chaînes engendré par les simplexes filtrés de  $X$ . Dans [4, Lemma A.16], nous avons construit deux opérateurs  $\text{sd} : C_{*}(X) \rightarrow C_{*}(X)$  et  $T : C_{*}(X) \rightarrow C_{*+1}(X)$  vérifiant  $\text{sd} \partial = \partial \text{sd}$  et  $\partial T + T \partial = \text{id} - \text{sd}$ . Nous y montrons aussi que la chaîne  $\text{sd}(\sigma)$  se compose de simplexes de la forme  $\sigma \circ \zeta$ , où  $\zeta \in \Delta^{\text{per}}(\Delta)$  est un élément du sous-complexe engendré par les simplexes linéaires de  $\Delta$  vérifiant  $\dim \zeta^{-1}(F) \leq \dim F$ , pour toute face  $F$  de  $\Delta$ . Avec ces notations, nous avons également établi l'inégalité

$$\|\sigma \circ \zeta\|_i \leq \|\sigma\|_i. \quad (8)$$

Ceci étant rappelé, la preuve de la Proposition 4.1 se déroule en trois étapes.

- *Première étape : L'opérateur subdivision*  $\text{sd} : C_{*}^{\bar{p}}(X) \rightarrow C_{*}^{\bar{p}}(X)$  *est homotope à l'identité.* Pour cela, nous montrons que les opérateurs,  $\text{sd}$  et  $T$ , préservent le degré pervers, c'est-à-dire induisent des opérateurs  $\text{sd} : C_{*}^{\bar{p}}(X) \rightarrow C_{*}^{\bar{p}}(X)$  et  $T : C_{*}^{\bar{p}}(X) \rightarrow C_{*+1}^{\bar{p}}(X)$ .

Commençons avec  $\text{sd}$ . Soit  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  un simplexe filtré, il nous faut établir l'inégalité  $\|\sigma \circ \zeta\|_S \leq \|\sigma\|_S$ , pour tout strate  $S \in \mathcal{S}_X$  et  $\zeta \in \Delta^{\text{per}}(\Delta)$ . Posons  $i = \text{codim } S$ . L'inégalité précédente est claire si  $\text{Im}(\sigma \circ \zeta) \cap S = \emptyset$ . Si  $\text{Im}(\sigma \circ \zeta) \cap S \neq \emptyset$ , alors  $\text{Im } \sigma \cap S \neq \emptyset$  et nous avons

$$\|\sigma \circ \zeta\|_S = \|\sigma \circ \zeta\|_i \leq \|\sigma\|_i = \|\sigma\|_S,$$

où l'inégalité provient de (8). La preuve est similaire pour l'opérateur  $T$ .

- *Deuxième étape.*

$$\text{Pour tout } \xi = \sum_{j \in J} n_j \sigma_j \in C_{*}^{\bar{p}}(X), \text{ il existe } k \geq 0 \text{ tel que } \text{sd}^k \xi \in C_{*}^{\bar{p}}(U) + C_{*}^{\bar{p}}(V). \quad (9)$$

La théorie classique nous assure l'existence d'un entier  $r$  tel que  $\text{sd}^r \xi \in C_{*}(U) + C_{*}(V)$ ; nous pouvons donc supposer

$$\xi \in C_{*}^{\bar{p}}(X) \cap (C_{*}(U) + C_{*}(V)). \quad (10)$$

Définissons une relation d'équivalence sur  $C_{*}^{\bar{p}}(X)$  par

$$\xi \sim \gamma \text{ s'il existe } k \geq 0, \text{ tel que } \text{sd}^k \xi - \text{sd}^k \gamma \in C_{*}^{\bar{p}}(U) + C_{*}^{\bar{p}}(V).$$

Cette relation est clairement compatible avec les sommes et la deuxième étape équivaut à démontrer

$$\xi \sim 0, \quad (11)$$

pour tout  $\xi \in C_*^{\bar{p}}(X)$ . Nous le faisons par récurrence sur le  $\bar{p}$ -défaut de  $\xi$ , introduit dans la Définition 4.5. La Proposition 4.4.c nous assure que la propriété (11) est vraie pour tout  $\xi \in C_*^{\bar{p}}(X)$  tel que  $\ell_{\bar{p}}(\xi) = -1$ . Supposons donc (11) vraie pour tout  $\gamma \in C_*^{\bar{p}}(X)$  tel que  $\ell_{\bar{p}}(\gamma) < m$  et considérons  $\xi \in C_*^{\bar{p}}(X)$  avec  $\ell_{\bar{p}}(\xi) = m$ . Décomposons  $\xi$  en  $\xi = \xi_0 + \dots + \xi_m$ , où

- $\xi_0$  est constitué de simplexes  $\sigma$  tels que  $\ell_{\bar{p}}(\sigma) = 0$ , d'où  $\xi_0 \sim 0$ ,
- si  $i > 0$ ,  $\xi_i$  est constitué de simplexes  $\sigma$  ayant une face  $\bar{p}$ -funeste et tels que  $\ell_{\bar{p}}(\sigma) = i$ .

Avec l'hypothèse de récurrence, on peut supposer  $\xi = \xi_m$ .

Notons  $(\tau_j)_{j \in I}$  les faces  $\bar{p}$ -funestes de  $\xi$  et décomposons  $\xi$  suivant ces faces ; i.e.,  $\xi = \sum_{j \in I} \xi(j)$ , où les simplexes de  $\xi(j)$  ont  $\tau_j$  comme face  $\bar{p}$ -funeste. Soit  $\sigma$  un simplexe de  $\xi(j)$ . La chaîne  $\xi$  étant de  $\bar{p}$ -intersection, il existe un simplexe  $\sigma'$  de  $\xi$ , qui a aussi  $\tau_j$  comme face. La Proposition 4.4.b implique que  $\sigma$  et  $\sigma'$  ont toutes les deux  $\tau_j$  comme face  $\bar{p}$ -funeste. Donc  $\sigma'$  est un simplexe de  $\xi(j)$  et la chaîne  $\xi(j)$  est de  $\bar{p}$ -intersection. La compatibilité de la relation d'équivalence avec les sommes nous permet de supposer que chaque simplexe de  $\xi$  possède la même face  $\bar{p}$ -funeste,  $\tau : \nabla \rightarrow X$ .

Grace à (10), nous pouvons aussi supposer  $\text{Im } \tau \subset U$ . Il existe une subdivision de  $\xi$  telle que

$$sd^k \xi = \sum_{\text{Im } \beta_a \cap \text{Im } \tau = \emptyset} n_a \beta_a + \sum_{\text{Im } \beta_b \cap \text{Im } \tau \neq \emptyset} n_b \beta_b \in C_*^{\bar{p}}(X), \quad (12)$$

avec  $\text{Im } \beta_b \subset U$ , pour tout  $b$ . Avec le rappel fait au début de cette preuve et la réduction précédente, nous savons que chaque élément  $\beta$  de ces sommes est obtenu à partir d'un simplexe  $\sigma$  de  $\xi$ , vérifiant  $\ell_{\bar{p}}(\sigma) = m$ , et d'un élément  $\zeta : \Delta \rightarrow \Delta$  d'une subdivision barycentrique itérée de  $\Delta$ , de même dimension que  $\Delta$ . La Proposition 4.7 nous donne  $\ell_{\bar{p}}(\beta) \leq m$  et nous avons montré que

$$sd^k \xi = (sd^k \xi)_0 + \dots + (sd^k \xi)_{m-1} + (sd^k \xi)_m.$$

Avec la récurrence et la compatibilité aux sommes, il suffit maintenant de montrer  $(sd^k \xi)_m \sim 0$ .

Soit  $\beta = \sigma \circ \zeta$  avec  $\ell_{\bar{p}}(\beta) = m$ . De  $\ell_{\bar{p}}(\sigma \circ \zeta) = m = \ell_{\bar{p}}(\sigma) \geq 1$  et de la Proposition 4.7, nous déduisons  $\text{Im } \zeta \cap T_{\bar{p}}(\sigma) \neq \emptyset$  et donc

$$\text{Im } \beta \cap \text{Im } \tau = \sigma(\text{Im } \zeta \cap \nabla) \supset \sigma(\text{Im } \zeta \cap T_{\bar{p}}(\sigma)) \neq \emptyset.$$

Nous avons donc montré que pour la chaîne de  $\bar{p}$ -intersection,  $(sd^k \xi)_m$ , la décomposition (12) se réduit à

$$(sd^k \xi)_m = \sum_{\text{Im } \beta_b \cap \text{Im } \tau \neq \emptyset, \ell_{\bar{p}}(\beta_b) = m} n_b \beta_b.$$

Puisque  $\text{Im } \beta_b \subset U$ , nous obtenons  $(sd^k \xi)_m \in C_*^{\bar{p}}(U)$ , ce qui donne  $(sd^k \xi)_m \sim 0$ .

• *Étape finale.* L'inclusion  $\iota : \text{Im } \varphi \hookrightarrow C_*^{\bar{p}}(X)$  induit un isomorphisme en homologie. Soit  $[\xi] \in H_*^{\bar{p}}(X)$ . La première étape implique  $[\xi] = [\text{sd}^i \xi]$ , pour tout  $i \geq 0$ . Avec la deuxième étape, on sait qu'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $\text{sd}^k \xi \in \text{Im } \varphi$ , ce qui implique la surjectivité de  $\iota_*$ .



Pour démontrer l'injectivité de  $\iota_*$ , donnons nous  $[\alpha] \in H_*(\text{Im } \varphi)$  et  $\xi \in C_{*+1}^{\bar{p}}(X)$  tels que  $\alpha = \partial\xi$ . La deuxième étape fournit un entier  $k \geq 0$  avec  $\text{sd}^k \xi \in \text{Im } \varphi$ , ce qui implique  $[\alpha] = [\text{sd}^k \alpha] = [\text{sd}^k(\partial\xi)] = [\partial(\text{sd}^k \xi)]$  et  $[\alpha] = 0$  dans  $H_*(\text{Im } \varphi)$ .

Le connectant est construit de façon classique.  $\square$

**Définition 4.8.** — Soient  $(X, \bar{p})$  un espace pervers et  $U$  un ouvert de  $X$  muni de la perversité induite. Le *complexe des chaînes relatives de  $\bar{p}$ -intersection* est le quotient  $C_*^{\bar{p}}(X, U; G) = C_*^{\bar{p}}(X; G)/C_*^{\bar{p}}(U; G)$ . Son homologie est appelée *homologie de  $\bar{p}$ -intersection relative de la paire d'espaces pervers  $(X, U, \bar{p})$* , à coefficients dans le groupe abélien  $G$  et noté  $H_*^{\bar{p}}(X, U; G)$ .

Par définition de l'homologie relative, nous avons une suite exacte longue de la paire  $(X, U, \bar{p})$ ,

$$\dots \rightarrow H_i^{\bar{p}}(U; G) \rightarrow H_i^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow H_i^{\bar{p}}(X, U; G) \rightarrow H_{i-1}^{\bar{p}}(U; G) \rightarrow \dots \quad (13)$$

**Corollaire 4.9.** — Soit  $(X, \bar{p})$  un espace pervers. Si  $F$  est un fermé de  $X$  et  $U$  un ouvert de  $X$  tels que  $F \subset U$ , alors, l'inclusion naturelle  $(X \setminus F, U \setminus F) \hookrightarrow (X, U)$  induit un isomorphisme en homologie,

$$H_i^{\bar{p}}(X \setminus F, U \setminus F; G) \cong H_i^{\bar{p}}(X, U; G).$$

*Démonstration.* — Ce résultat se déduit directement de la suite exacte de Mayer-Vietoris, cf. [19, Chapter 4, Section 6, Corollary 5]) pour l'homologie singulière classique.  $\square$

**Corollaire 4.10.** — Soit  $(X, \bar{p})$  un espace pervers muni d'un recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$ . Notons  $C_*^{\bar{p}, \mathcal{U}}(X)$  le sous-complexe de  $C_*^{\bar{p}}(X)$  formé des chaînes dont le support est inclus dans un des ouverts du recouvrement  $\mathcal{U}$ . Alors, l'inclusion canonique,  $\iota: C_*^{\bar{p}, \mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_*^{\bar{p}}(X)$ , induit un isomorphisme en homologie.

*Démonstration.* — Rappelons l'opérateur  $\text{sd}: C_*^{\bar{p}}(X) \rightarrow C_*^{\bar{p}}(X)$  introduit dans la démonstration de la Proposition 4.1. Par construction, pour tout élément  $\xi \in C_*^{\bar{p}}(X)$ , il existe un entier  $m$  tel que  $\text{sd}^m \xi \in C_*^{\bar{p}, \mathcal{U}}(X)$  et  $\text{sd}^m \xi$  est un cycle si  $\xi$  l'est. L'argument utilisé dans la dernière étape de la démonstration de la Proposition 4.1 implique alors la surjectivité et l'injectivité de  $\iota_*$ .  $\square$

**Corollaire 4.11.** — Soient  $(X, \bar{p})$  un espace pervers et  $S^\ell$  la sphère de  $\mathbb{R}^{\ell+1}$ . On munit le produit  $S^\ell \times X$  des filtration et perversité définies dans les Exemples 1.2 et 2.4, la perversité sur le produit étant encore notée  $\bar{p}$ . Alors, la projection  $p_X: S^\ell \times X \rightarrow X$ ,  $(z, x) \mapsto x$ , induit des isomorphismes,  $H_k^{\bar{p}}(S^\ell \times X; G) \cong H_k^{\bar{p}}(X; G) \oplus H_{k-\ell}^{\bar{p}}(X; G)$ .

*Démonstration.* — Il suffit de raisonner par induction en appliquant les Propositions 3.9 et 4.1 à la décomposition  $S^\ell = S^\ell \setminus \{\text{Nord}\} \cup S^\ell \setminus \{\text{Sud}\}$ .  $\square$

## 5. Démonstration du Théorème A

La méthode de preuve est classique. C'est une variante de [11, Theorem 10], [16, Lemma 1.4.1]. Nous choisissons la formulation présentée par G. Friedman dans sa monographie, [6, Section 5.1], et rappelée ci-dessous.

**Théorème 5.1.** — [6, Theorem 5.3]. *Soit  $\mathcal{F}_X$  la catégorie dont les objets sont homéomorphes aux parties ouvertes d'un CS-ensemble,  $X$ , et dont les morphismes sont les inclusions et les homéomorphismes stratifiés. Soit  $Ab_*$  la catégorie des groupes abéliens gradués. Considérons deux foncteurs,  $F_*, G_*: \mathcal{F}_X \rightarrow Ab_*$  et une transformation naturelle,  $\Phi: F_* \rightarrow G_*$  tels que  $F_*, G_*$  et  $\Phi$  satisfont les propriétés ci-dessous.*

- (a) *Les foncteurs  $F_*$  et  $G_*$  possèdent des suites exactes de Mayer-Vietoris et la transformation naturelle  $\Phi$  induit un diagramme commutatif entre ces suites.*
- (b) *Si  $\{U_\alpha\}$  est une suite croissante d'ouverts de  $X$  et  $\Phi: F_*(U_\alpha) \rightarrow G_*(U_\alpha)$  est un isomorphisme pour tout  $\alpha$ , alors  $\Phi: F_*(\cup_\alpha U_\alpha) \rightarrow G_*(\cup_\alpha U_\alpha)$  est un isomorphisme.*
- (c) *Si  $L$  est un espace compact filtré tel que  $\mathbb{R}^i \times \mathring{c}L$  est homéomorphe, de façon stratifiée, à un sous-ensemble ouvert de  $X$  pour lequel  $\Phi: F_*(\mathbb{R}^i \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{w}\})) \rightarrow G_*(\mathbb{R}^i \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{w}\}))$  est un isomorphisme, alors  $\Phi: F_*(\mathbb{R}^i \times \mathring{c}L) \rightarrow G_*(\mathbb{R}^i \times \mathring{c}L)$  est un isomorphisme également.*
- (d) *Si  $U$  est un sous-ensemble ouvert de  $X$ , contenu dans une seule strate et homéomorphe à un espace euclidien, alors  $\Phi: F_*(U) \rightarrow G_*(U)$  est un isomorphisme.*

Alors  $\Phi: F_*(X) \rightarrow G_*(X)$  est un isomorphisme.

Pour pouvoir l'utiliser, il nous faut d'abord calculer l'homologie d'un cône pour le complexe obtenu à partir des simplexes filtrés.

**Proposition 5.2 (Homologie du cône).** — *Soit  $X$  un espace filtré, compact de dimension formelle  $n$ . Considérons le cône,  $\mathring{c}X$ , muni de la filtration conique et d'une perversité  $\bar{p}$ . Nous notons également  $\bar{p}$  la perversité induite sur  $X$ , cf. Exemple 2.4. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- (a) *L'application  $\iota_{\mathring{c}X}: X \rightarrow \mathring{c}X$ ,  $x \mapsto [0, 1/2]$ , induit un isomorphisme,  $H_k^{\bar{p}}(X; G) \xrightarrow{\cong} H_k^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G)$ , pour tout  $k < n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$ , où  $\mathbf{w}$  est le sommet du cône.*
- (b) *L'inclusion canonique  $C_*^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G) \rightarrow C_*(\mathring{c}X; G)$  induit un isomorphisme,  $H_k^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G) \xrightarrow{\cong} H_k(\mathring{c}X; G)$ , pour tout  $k \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$ , i.e.,*

$$H_k^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \neq k \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}), \\ G & \text{si } 0 = k \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}). \end{cases}$$

*Démonstration.* — Considérons un simplexe filtré  $\bar{p}$ -admissible,  $\sigma: \Delta \rightarrow \mathring{c}X$ .

- (a) Soit  $k = \dim \Delta \leq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$ . De

$$\|\sigma\|_{\{\mathbf{w}\}} \leq k - (n + 1) + \bar{p}(\{\mathbf{w}\}) < 0,$$

nous déduisons  $\sigma^{-1}(\{\mathbf{w}\}) = \emptyset$  et  $C_{\leq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})}^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G) = C_{\leq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})}^{\bar{p}}(X \times ]0, 1[; G)$ . Cette égalité et le Corollaire 3.9 impliquent alors

$$H_k^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G) = H_k^{\bar{p}}(X \times ]0, 1[; G) = H_k^{\bar{p}}(X; G), \text{ pour tout } k < n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}).$$

(b) Soit  $k = \dim \Delta \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$ . Si  $[x, t] \in \mathring{c}X$ , nous définissons  $s \cdot [x, t] = [x, st]$ , pour tout  $s \in [0, 1]$ . Pour établir la deuxième assertion, il nous suffit de montrer la  $\bar{p}$ -admissibilité du cône,  $c\sigma: \{\mathbf{v}\} * \Delta \rightarrow \mathring{c}X$ , définie par  $c\sigma(sx + (1-s)\mathbf{v}) = s \cdot \sigma(x)$ , pour tout  $s \in [0, 1]$  et  $x \in \Delta$ . L'espace  $X$  étant compact, on en déduit une application de chaînes,  $c\sigma: C_*(\mathring{c}X; G) \rightarrow C_*(\mathring{c}X; G)$ . Rappelons que les strates de  $\mathring{c}X$  sont de deux types,  $S \times ]0, 1[$  avec  $S$  strate de  $X$ , ou réduite au sommet du cône. Distinguons chacune de ces situations.

(i) Pour les strates  $S \times ]0, 1[$ , nous remarquons d'abord

$$(c\sigma)^{-1}(S \times ]0, 1[) = \{sa + (1-s)\mathbf{v} \mid s \cdot \sigma(x) \in S \times ]0, 1[ \} = c\sigma^{-1}(S \times ]0, 1[) \setminus \{\mathbf{v}\}.$$

Si  $(c\sigma)^{-1}(S \times ]0, 1[) \neq \emptyset$ , alors  $\sigma^{-1}(S \times ]0, 1[) \neq \emptyset$  et on a,

$$\begin{aligned} \|c\sigma\|_{S \times ]0, 1[} &= 1 + \|\sigma\|_{S \times ]0, 1[} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} 1 + k - \text{codim}(S \times ]0, 1[) + \bar{p}(S \times ]0, 1[) \\ &\leq \dim(\{\mathbf{v}\} * \Delta) - \text{codim}(S \times ]0, 1[) + \bar{p}(S \times ]0, 1[). \end{aligned}$$

(L'inégalité (1) est exactement la  $\bar{p}$ -admissibilité de  $\sigma$  sur la strate  $S \times ]0, 1[$ .)

(ii) Pour la strate réduite au sommet, nous avons  $(c\sigma)^{-1}(\{\mathbf{w}\}) = \{\mathbf{v}\} * \sigma^{-1}(\{\mathbf{w}\})$ . Nous en déduisons

$$\|c\sigma\|_{\{\mathbf{w}\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^{-1}(\{\mathbf{w}\}) = \emptyset, \\ 1 + \|\sigma\|_{\{\mathbf{w}\}} & \text{si } \sigma^{-1}(\{\mathbf{w}\}) \neq \emptyset. \end{cases}$$

La  $\bar{p}$ -admissibilité du simplexe  $\sigma$  se traduit ici par  $\|\sigma\|_{\{\mathbf{w}\}} \leq \dim \Delta - (n+1) + \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$ ; il s'ensuit, si  $\sigma^{-1}(\{\mathbf{w}\}) \neq \emptyset$ ,

$$\|c\sigma\|_{\{\mathbf{w}\}} = 1 + \|\sigma\|_{\{\mathbf{w}\}} \leq \dim(\{\mathbf{v}\} * \Delta) - \text{codim} \{\mathbf{w}\} + \bar{p}(\{\mathbf{w}\}).$$

Supposons maintenant  $\sigma^{-1}(\{\mathbf{w}\}) = \emptyset$ . La condition de  $\bar{p}$ -admissibilité s'écrit alors

$$0 = \|c\sigma\|_{\{\mathbf{w}\}} \leq \dim(\mathbf{v} * \Delta) - \text{codim} \{\mathbf{w}\} + \bar{p}(\{\mathbf{w}\}) = (k+1) - (n+1) + \bar{p}(\{\mathbf{w}\}).$$

C'est exactement, l'hypothèse  $k \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$  de cette assertion (b).

En regroupant (i) et (ii), nous avons établi la  $\bar{p}$ -admissibilité de  $c\sigma$ . L'assertion (b) de l'énoncé découle alors de

$$\partial c\sigma = \begin{cases} c\partial\sigma + (-1)^{k+1}\sigma & \text{si } k \neq 0, \\ \mathbf{w} - \sigma & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

□

Le résultat suivant est une conséquence directe de cette proposition et de la suite exacte longue d'homologie d'intersection d'une paire.

**Corollaire 5.3.** — *Avec les hypothèses et notations de la Proposition 5.2, les propriétés suivantes sont vérifiées,*

$$H_k^{\bar{p}}(\mathring{c}X, \mathring{c}X \setminus \{\mathbf{w}\}; G) = \begin{cases} \tilde{H}_{k-1}^{\bar{p}}(X; G) & \text{si } k \geq n + 1 - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}), \\ 0 & \text{si } k \leq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}), \end{cases}$$

où  $\tilde{H}$  est l'homologie réduite.

Le Corollaire 3.9 et la Proposition 5.2 engendrent directement le résultat suivant.

**Corollaire 5.4.** — *Reprenons les hypothèses et notations de la Proposition 5.2. En notant aussi  $\bar{p}$  la perversité sur  $\mathbb{R}^m \times \mathring{c}X$  obtenue par extension de celle sur  $\mathring{c}X$  (cf. Exemple 2.4) nous avons,*

$$H_k^{\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}X; G) = \begin{cases} H_k^{\bar{p}}(X; G) & \text{si } k < n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}), \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}), \\ G & \text{si } k = 0 \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}). \end{cases}$$

*Démonstration du Théorème A.* — La preuve consiste à vérifier les conditions du Théorème 5.1 rappelé ci-dessus dans le cas où  $\Phi: H_*^{\bar{p}}(U; G) \xrightarrow{\cong} I^{\bar{p}}H_*(U; G)$  est la transformation naturelle induite par l'inclusion canonique,  $C_*^{\bar{p}}(U; G) \hookrightarrow I^{\bar{p}}C_*(U; G)$ .

(a) L'exactitude des suites de Mayer-Vietoris est démontrée dans la Proposition 4.1 pour le complexe  $C_*^{\bar{p}}(X; G)$  et dans [6, Sections 4.4 et 5.3] pour le complexe  $I^{\bar{p}}C_*(X; G)$ .

(b) Avec les hypothèses mises sur la famille d'ouverts, la conclusion découle de l'existence d'isomorphismes,

$$\varinjlim_{\alpha} I^{\bar{p}}H_*(U_{\alpha}; G) \xrightarrow{\cong} I^{\bar{p}}H_*(\varinjlim_{\alpha} U_{\alpha}; G) \text{ et } \varinjlim_{\alpha} H_*^{\bar{p}}(U_{\alpha}; G) \xrightarrow{\cong} H_*^{\bar{p}}(\varinjlim_{\alpha} U_{\alpha}; G).$$

C'est un argument classique pour les théories homologiques à supports compacts.

(c) Soit  $L$  un espace compact filtré tel que l'inclusion canonique des complexes de chaînes induise un isomorphisme,

$$\Phi_{(\mathbb{R}^i \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{w}\}))}: H_*^{\bar{p}}(\mathbb{R}^i \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{w}\}); G) \xrightarrow{\cong} I^{\bar{p}}H_*(\mathbb{R}^i \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{w}\}); G).$$

L'application  $\mathbb{R}^i \times ]0, 1[ \times L \rightarrow \mathbb{R}^i \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{w}\})$  étant un homéomorphisme stratifié d'espaces stratifiés pour lequel les perversités coïncident, on en déduit un isomorphisme,

$$\Phi_{\mathbb{R}^i \times ]0, 1[ \times L}: H_*^{\bar{p}}(\mathbb{R}^i \times ]0, 1[ \times L; G) \xrightarrow{\cong} I^{\bar{p}}H_*(\mathbb{R}^i \times ]0, 1[ \times L; G).$$

Considérons le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} H_*^{\bar{p}}(\mathbb{R}^i \times ]0, 1[ \times L; G) & \xrightarrow{\Phi_{\mathbb{R}^i \times ]0, 1[ \times L}} & I^{\bar{p}}H_*(\mathbb{R}^i \times ]0, 1[ \times L; G) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ H_*^{\bar{p}}(L; G) & \xrightarrow{\Phi_L} & I^{\bar{p}}H_*(L; G) \\ \downarrow (\iota_{\mathring{c}L})_* & & \downarrow (\iota_{\mathring{c}L})_* \\ H_*^{\bar{p}}(\mathring{c}L; G) & \xrightarrow{\Phi_{\mathring{c}L}} & I^{\bar{p}}H_*(\mathring{c}L; G). \end{array}$$

Avec le Corollaire 3.9 et [6, Section 4.1 et 5.3], nous savons que les deux flèches  $p_*$  induites par la projection canonique sont des isomorphismes, nous pouvons donc conclure que  $\Phi_L$  est un isomorphisme.

Si  $* < n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$ , la Proposition 5.2.a et [6, Section 5.4] nous assurent que les deux applications induites par  $\iota_{\mathring{c}L}$  sont des isomorphismes. Ainsi,  $\Phi_{\mathring{c}L}$  est un isomorphisme aussi dans ces dimensions.

Le fait que  $\Phi_{\varepsilon L}$  soit un isomorphisme dans les dimensions  $* \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$ , découle de la Proposition 5.2.b et de [6, Section 5.4].

(d) Dans ce cas, l'injection canonique devient l'identité sur  $C_*(U; G)$ ; la propriété requise est donc vérifiée trivialement.  $\square$

Nous terminons cette section par le calcul de l'homologie d'intersection pour certaines perversités particulières, dans le cas d'un CS-ensemble.

**Proposition 5.5.** — *Soit  $(X, \bar{p})$  un CS-ensemble pervers. Alors on a,*

- (i)  $H_*^{\bar{t}}(X; G) = H_*(X; G)$ , si  $X$  est normal,
- (ii)  $H_*^{\bar{p}}(X) = H_*(X; G)$ , si  $\bar{p} > \bar{t}$ ,
- (iii)  $H_*^{\bar{p}}(X) = H_*(X \setminus \Sigma; G)$ , si  $\bar{p} < \bar{0}$ .

*Démonstration.* — Dans chacun des cas, la preuve consiste à vérifier les conditions du Théorème 5.1 et plus particulièrement le point (c) de son énoncé. Pour la propriété (i), nous notons  $\Phi_U: H_*^{\bar{t}}(U; G) \xrightarrow{\cong} H_*(U; G)$  la transformation naturelle induite par l'inclusion canonique,  $C_*^{\bar{t}}(U; G) \hookrightarrow C_*(U; G)$ , et considérons un CS-ensemble compact connexe,  $L$ , tel que la flèche  $\Phi_L$  du diagramme commutatif suivant soit un isomorphisme,

$$\begin{array}{ccc} H_*^{\bar{t}}(L; G) & \xrightarrow{\Phi_L} & H_*(L; G) \\ (\iota_{\varepsilon L})_* \downarrow & & \downarrow (\iota_{\varepsilon L})_* \\ H_*^{\bar{t}}(\varepsilon L; G) & \xrightarrow{\Phi_{\varepsilon L}} & H_*(\varepsilon L; G). \end{array}$$

Il nous faut montrer que  $\Phi_{\varepsilon L}$  est aussi un isomorphisme. Comme  $n - \bar{t}(\mathbf{w}) = n - (n - 1) = 1$ , la Proposition 5.2 implique  $H_i^{\bar{t}}(\varepsilon L; G) = \begin{cases} H_0^{\bar{t}}(L; G) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$  Par induction, on a  $H_0^{\bar{t}}(L; G) = H_0(L; G)$ . Avec l'hypothèse de connexité de  $L$ , on déduit alors que  $\Phi_{\varepsilon L}$  est un isomorphisme.

Le raisonnement est similaire pour les deux autres cas et nous ne le détaillons pas. Remarquons cependant que le dernier point utilise les isomorphismes suivants, déjà établis,  $H_*(\varepsilon L \setminus \varepsilon \Sigma_L; G) \cong H_*(L \times ]0, 1[ \setminus (\Sigma_L \times ]0, 1[; G) \cong H_i(L \setminus \Sigma_L; G)$ .  $\square$

## 6. Une certaine invariance topologique. Théorème B

Dans cette section, nous rappelons la construction du CS-ensemble intrinsèque associé à un CS-ensemble. Nous y démontrons aussi (cf. Théorème B) un théorème d'invariance topologique pour des  $K$ -perversités, cf. Définition 6.7.

Le CS-ensemble intrinsèque associé à un CS-ensemble donné apparaît chez H. King ([11]), qui en attribue l'idée à D. Sullivan. Une étude détaillée de ses propriétés se trouve dans la monographie de G. Friedman, [6, Section 2.8].

**Définition 6.1.** — Deux points,  $x_0, x_1$ , d'un espace topologique,  $X$ , sont *équivalents* s'il existe un homéomorphisme  $h: (U_0, x_0) \xrightarrow{\cong} (U_1, x_1)$  entre des voisinages de  $x_0$  et  $x_1$ . Cette relation est notée  $x_0 \sim x_1$ .

Remarquons que deux points quelconques d'une même strate d'un CS-ensemble sont équivalents. Les classes d'équivalence de la relation  $\sim$  sont donc des réunions de strates de  $X$ . La construction du CS-ensemble intrinsèque associé à un CS-ensemble s'effectue comme suit.

**Proposition 6.2.** — [6, Section 2.8] *Soit  $X$  un CS-ensemble. Notons  $X_i^*$  la réunion des classes d'équivalence pour la relation  $\sim$  formée des strates de  $X$  de dimension inférieure ou égale à  $i$ . Alors, l'espace topologique  $X$  muni de cette filtration est un CS-ensemble, noté  $X^*$ , dont la filtration ne dépend pas de la filtration initiale du CS-ensemble  $X$ .*

**Définition 6.3.** — Avec les notations de la Proposition 6.2, l'espace  $X^*$  est appelé *CS-ensemble intrinsèque* associé au CS-ensemble  $X$ . L'identité sur l'espace topologique sous-jacent induit une application, notée  $\nu: X \rightarrow X^*$  et appelée *agrégation intrinsèque*.

Pour comparer les homologies d'intersection de  $X$  et  $X^*$ , nous avons besoin de relier leurs strates; c'est le rôle de la définition suivante.

**Définition 6.4.** — Soit  $X$  un CS-ensemble d'agrégation intrinsèque,  $\nu: X \rightarrow X^*$ . Une strate  $S$  de  $X$  est appelée *source d'une strate  $T$  de  $X^*$*  si  $\nu(S) \subset T$  et  $\dim S = \dim T$ .

**Proposition 6.5.** — *Soit  $X$  un CS-ensemble, d'agrégation intrinsèque  $\nu: X \rightarrow X^*$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- (a) *L'agrégation intrinsèque  $\nu$  est un morphisme stratifié.*
- (b) *L'ensemble réunion des sources d'une strate  $T$  de  $X^*$  est dense dans  $T$ .*
- (c) *Tout ouvert  $U$  de  $X$  est un CS-ensemble dont le CS-ensemble intrinsèque associé est filtré par  $U_i^* = X_i^* \cap U$ . Notons  $\iota: U \rightarrow X$ ,  $j: U^* \rightarrow X^*$  les injections canoniques et  $\nu^U: U \rightarrow U^*$  l'agrégation intrinsèque de  $U$ . Alors, le diagramme suivant est commutatif,*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\iota} & X \\ \nu^U \downarrow & & \downarrow \nu \\ U^* & \xrightarrow{j} & X^* \end{array}$$

*Démonstration.* — (a) Soit  $\nu(x) \in X_i^* \setminus X_{i-1}^*$  un point de la strate  $T$  de  $X^*$ . Il existe une strate  $S$  de  $X$ , de dimension  $i$ , telle que  $x \sim y$  pour tout  $y \in S$ . (En effet, si une telle strate n'existe pas, on a  $x \in X_{i-1}^*$ , par définition de la filtration sur  $X^*$ .) Les strates de  $X^*$  étant saturées pour la relation  $\sim$ , on en déduit  $\nu(S) \subset T$ .

(b) L'ensemble  $\nu^{-1}(T) = \cup_{\nu(S) \subset T} S$  a une structure de variété topologique, de même dimension que  $T$ . De plus, la famille des strates,  $\{S \mid \nu(S) \subset T\}$ , est une famille localement finie de sous-variétés de  $\nu^{-1}(T)$ . Pour des raisons de dimension, l'union des sources de  $T$ ,  $\{S \mid \nu(S) \subset T \text{ et } \dim S = \dim T\}$ , est dense dans  $\nu^{-1}(T)$ .

(c) Le fait que l'agrégation intrinsèque soit compatible avec la restriction à un ouvert de  $X$  découle des définitions, cf. [6, Section 2.8] pour plus de détails.  $\square$

**Définition 6.6.** — Si  $X$  est un CS-ensemble, deux strates,  $S, S'$ , sont *équivalentes* s'il existe  $x_0 \in S, x_1 \in S'$  avec  $x_0 \sim x_1$ . Cette relation est notée  $S \sim S'$ .

Nous introduisons maintenant l'analogie des perversités de King, dans le cadre des perversités générales.

**Définition 6.7.** — Une *K-perversité* sur un *CS-ensemble*,  $X$ , est une perversité  $\bar{p}$  vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) Si  $S$  et  $S'$  sont deux sources de la même strate, alors  $\bar{p}(S) = \bar{p}(S')$ .
- (ii) Si  $S$  est une strate équivalente à une strate régulière, alors  $0 \leq \bar{p}(S)$ .
- (iii) Si  $S'$  est une strate source et *singulière*, alors les relations  $S \preceq S'$  et  $S \sim S'$  impliquent  $\bar{p}(S) \leq \bar{p}(S')$  et  $D\bar{p}(S') \leq D\bar{p}(S)$ .

**Propriété 6.8.** — Soit  $X$  un *CS-ensemble* d'agrégation intrinsèque,  $\nu: X \rightarrow X^*$ . Les propriétés suivantes découlent directement des définitions de *K-perversité* et de la construction de  $X^*$ .

- Dans le cas d'une perversité *classique*, la propriété (i) est toujours vérifiée.
- Toute perversité de King (cf. Définition 2.1) vérifiant  $\bar{p}(1) \geq 0$  est une *K-perversité*.
- Une *K-perversité* prend la même valeur sur toutes les sources d'une même strate.
- Toute perversité sur le *CS-ensemble* intrinsèque  $X^*$  est une *K-perversité*.
- Toute perversité image réciproque par  $\nu: X \rightarrow X^*$  d'une perversité sur  $X^*$  est une *K-perversité*. La réciproque est fautive.

Nous construisons maintenant une perversité sur  $X^*$  à partir de la donnée d'une *K-perversité* sur  $X$ .

**Proposition 6.9.** — Soit  $X$  un *CS-ensemble*, d'agrégation intrinsèque  $\nu: X \rightarrow X^*$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- (a) Toute *K-perversité*,  $\bar{p}$ , sur  $X$  induit une perversité,  $\nu_*\bar{p}$ , sur  $X^*$  définie par

$$\nu_*\bar{p}(T) = \bar{p}(S),$$

où  $S$  est une source de  $T$ .

- (b) Soit  $U$  un ouvert de  $X$  muni de la structure de *CS-ensemble* induite. Notons  $\iota: U \rightarrow X$ ,  $j: U^* \rightarrow X^*$  les injections canoniques et  $\nu^U: U \rightarrow U^*$  l'agrégation intrinsèque de  $U$ . Alors, pour toute *K-perversité*,  $\bar{p}$ , sur  $X$ , on a

$$\nu_*^U \iota^* \bar{p} = j^* \nu_* \bar{p}.$$

- (c) Pour toute *K-perversité*,  $\bar{p}$ , sur  $X$ , l'agrégation intrinsèque,  $\nu: X \rightarrow X^*$  induit un morphisme de complexes,  $\nu_*: C_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow C_*^{\nu_*\bar{p}}(X^*; G)$ .
- (d) Pour toute perversité classique,  $\bar{p}$ , la perversité  $\nu_*\bar{p}$  existe et vérifie  $\nu_*\bar{p} = \bar{p}$ .

*Démonstration.* — (a) L'égalité  $\nu_*\bar{p}(T) = \bar{p}(S)$  a un sens car toute strate  $T$  de  $X^*$  admet au moins une source et que la *K-perversité*,  $\bar{p}$ , prend la même valeur sur toutes les sources de  $T$ .

(b) Remarquons que toute strate de  $U^*$  est une composante connexe,  $cc(T \cap U^*)$ , de l'intersection  $T \cap U$  de  $U$  avec une strate,  $T$ , de  $X^*$  et qu'une source de  $cc(T \cap U^*)$  est une composante connexe,  $cc(S \cap U)$ , de l'intersection  $S \cap U$  de  $U$  avec une source,  $S$ , de  $T$ . Nous pouvons donc écrire, à partir du point (a) et de la Définition 2.3,

$$\begin{cases} (j^* \nu_* \bar{p})(cc(T \cap U^*)) = \nu_* \bar{p}(T) = \bar{p}(S), \\ (\nu_*^U \iota^* \bar{p})(cc(T \cap U^*)) = \iota^* \bar{p}(cc(S \cap U)) = \bar{p}(S), \end{cases}$$

ce qui est l'égalité annoncée.

(c) Soit  $T$  une strate de  $X^*$  que l'on peut supposer singulière (cf. Remarque 3.7) et soit  $S$  une strate source de  $T$ , qui existe d'après la Proposition 6.5. D'après la définition de la perversité  $\nu_*\bar{p}$  et la Définition 2.3, on a

$$\begin{aligned}\nu^*D\nu_*\bar{p}(S) &= D\nu_*\bar{p}(T) = \text{codim } T - 2 - \nu_*\bar{p}(T) \\ &= \text{codim } S - 2 - \bar{p}(S) = D\bar{p}(S).\end{aligned}$$

Le résultat est maintenant une conséquence du point (a) et de la Proposition 3.6.

(d) Toute perversité classique vérifie la condition (i) de la Définition 6.7 et, d'après le point (a) ci-dessus, cette dernière est suffisante pour définir  $\nu_*\bar{p}$ . L'égalité  $\bar{p} = \nu_*\bar{p}$  découle directement des définitions.  $\square$

**Théorème B.** — Soit  $(X, \bar{p})$  un CS-ensemble pervers dans lequel  $\bar{p}$  est une K-perversité. Alors, l'agrégation intrinsèque,  $\nu: X \rightarrow X^*$ , induit un isomorphisme,

$$H_*^{\bar{p}}(X; G) \cong H_*^{\nu_*\bar{p}}(X^*; G).$$

Ce résultat contient l'invariance topologique établie par M. Goresky et R. MacPherson, [10, Section 4.1]. Nous présentons cette dernière sous une forme légèrement moins restrictive, due à H. King dans [11], cf. aussi [6, Section 5.6].

**Corollaire 6.10.** — Soit  $\bar{p}$  une perversité de King sur un CS-ensemble,  $X$ , vérifiant  $\bar{p}(1) \geq 0$ . Alors, l'agrégation intrinsèque,  $\nu: X \rightarrow X^*$ , induit un isomorphisme,

$$H_*^{\bar{p}}(X; G) \cong H_*^{\bar{p}}(X^*; G).$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord qu'une telle perversité est une K-perversité et que le Théorème B implique donc  $H_*^{\bar{p}}(X; G) \cong H_*^{\nu_*\bar{p}}(X^*; G)$ . L'égalité  $\nu_*\bar{p} = \bar{p}$  établie dans la Proposition 6.9 termine la preuve.  $\square$

En particulier, si  $X$  et  $X'$  sont deux CS-ensembles homéomorphes comme espaces topologiques, ils ont le même CS-ensemble intrinsèque associé et donc la même homologie d'intersection pour une perversité de King.

Du Théorème B, on déduit également une invariance topologique pour toutes les perversités obtenues par image réciproque d'une perversité définie sur le CS-ensemble intrinsèque.

**Proposition 6.11.** — Considérons deux CS-ensembles,  $X_1$  et  $X_2$ , homéomorphes en tant qu'espaces topologiques. Soit  $\bar{p}$  une perversité définie sur le CS-ensemble intrinsèque,  $X^*$ , commun à  $X_1$  et  $X_2$ . Si on munit  $X_1$  et  $X_2$  des perversités images réciproques,  $\bar{p}_1$  et  $\bar{p}_2$ , de  $\bar{p}$  par les agrégations intrinsèques,  $\nu^{X_1}$  et  $\nu^{X_2}$ , alors il existe un isomorphisme

$$H_*^{\bar{p}_1}(X_1; G) \cong H_*^{\bar{p}_2}(X_2; G).$$

*Démonstration.* — Rappelons que les images réciproques de perversités sur  $X^*$  par l'agrégation intrinsèque sont des K-perversités et remarquons que pour tout  $\nu: X \rightarrow X^*$ , on a  $\nu_*\nu^*\bar{p} = \bar{p}$ . Le résultat découle alors directement du Théorème B.  $\square$



**Remarque 6.12.** — En particulier, le Théorème B fournit une invariance topologique pour toute perversité classique,  $\bar{p}$ , en munissant  $X$  de la perversité image réciproque  $\nu^*\bar{p}$ . Mais, il faut prendre garde au fait que l'image réciproque d'une perversité classique n'a aucune raison d'être classique.

La preuve du Théorème B utilise la Proposition 5.1. Avant de l'expliciter, il nous faut préciser le comportement des voisinages coniques.

**Proposition 6.13.** — Soit  $(X, \bar{p})$  un CS-ensemble pervers dans lequel  $\bar{p}$  est une K-perversité. Soient  $S$  une strate de  $X$  et  $(U, \varphi)$  une carte conique d'un point  $x \in S$ . Si l'agrégation intrinsèque,  $\nu: X \rightarrow X^*$ , induit un isomorphisme,

$$\nu_*: H_*^{\bar{p}}(U \setminus S; G) \xrightarrow{\cong} H_*^{\nu^*\bar{p}}(U^* \setminus S; G),$$

alors elle induit aussi un isomorphisme,

$$\nu_*: H_*^{\bar{p}}(U; G) \xrightarrow{\cong} H_*^{\nu^*\bar{p}}(U^*; G).$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que l'application  $\nu_*$  est bien définie grâce à la Proposition 6.9. Dans le cas de perversités classiques, la Proposition 6.13 correspond à l'implication  $P(i) \Rightarrow R(i)$  de [11, Proposition 6], cf. aussi [6, Section 5.6]. Pour rendre la lecture plus autonome, nous avons choisi d'inclure ici certains passages déjà présents dans la preuve de H. King.

Commençons par une analyse des structures de CS-ensemble. Sans perte de généralité, à partir de la définition de voisinage conique, nous pouvons supposer  $U = \mathbb{R}^k \times \mathring{c}W$ , où  $W$  est un espace filtré compact et  $S \cap U = \mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}$ . D'après [11, Lemma 2 et Proposition 1], il existe un homéomorphisme d'espaces stratifiés,

$$h: (\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W)^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m \times \mathring{c}L, \quad (14)$$

où  $L$  est un espace filtré compact (éventuellement vide) et  $m \geq k$ . De plus, l'application  $h$  vérifie,

$$h(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) \subset \mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\} \text{ et } h^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}) = \mathbb{R}^k \times \mathring{c}A, \quad (15)$$

où  $A$  est une sphère de dimension  $m - k - 1$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  les sommets respectifs des cônes  $\mathring{c}L$  et  $\mathring{c}W$ . Avec ces notations, les hypothèse et conclusion s'écrivent,

$$h: H_*^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W \setminus (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}); G) \xrightarrow{\cong} H_*^{\nu^*\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L \setminus h(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}); G) \quad (16)$$

et

$$h: H_*^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W; G) \xrightarrow{\cong} H_*^{\nu^*\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L; G). \quad (17)$$

Posons  $s = \dim W$  et  $t = \dim L$ . Le résultat est immédiat si  $s = -1$ ; nous pouvons donc supposer  $s \geq 0$  et la strate  $\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}$  singulière. L'existence de l'homéomorphisme (14) implique  $k + s = m + t$ , et  $s \geq t$ , grâce à  $m \geq k$ .

Notons  $S_m$  une strate dans  $\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W$ , source de la strate  $\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$ . Une telle strate existe d'après la Proposition 6.5 et l'on a  $\nu^*\bar{p}(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}) = \bar{p}(S_m)$ . Nous avons donc  $\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\} \preceq S_m$  et  $\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\} \sim S_m$ . Par hypothèse,  $\bar{p}$  est une K-perversité, nous pouvons

donc écrire, lorsque la strate  $\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$  est singulière,

$$\begin{aligned}
 \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) - \nu_* \bar{p}(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}) &= \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) - \bar{p}(S_m) \\
 &\leq \text{codim}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) - \text{codim} S_m \\
 &= s + 1 - (k + s + 1 - m) \\
 &= m - k = s - t.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Nous établissons (17) en raisonnant sur les degrés homologiques.

• *Premier cas.* Supposons  $0 \neq i \geq s - \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\})$ .

Le Corollaire 5.4 implique  $H_i^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W; G) = 0$  et la preuve se réduit à montrer  $H_i^{\nu_* \bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L; G) = 0$ . Si la strate  $\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$  est régulière, alors  $L = \emptyset$  et l'on a  $H_i^{\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L; G) = H_i(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}; G) = 0$ .

Supposons donc  $\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$  singulière, ce qui nous permet de lui appliquer l'inégalité (18) et d'obtenir

$$i \geq s - \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) \geq t - \nu_* \bar{p}(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}) = t - \nu_* \bar{p}(\{\mathbf{v}\}).$$

Le Corollaire 5.4 appliqué à  $H_i^{\nu_* \bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L; G)$  donne le résultat cherché.

• *Deuxième cas.* Supposons  $0 = i \geq s - \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\})$ .

Comme dans le premier cas, le Corollaire 5.4 implique  $H_i^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W; G) = G$ . Ce groupe est engendré par un point quelconque d'une strate régulière de  $\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W$ . Remarquons que  $\nu$  envoie ce point dans une strate régulière de  $\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L$ . Il nous faut donc établir que  $H_0^{\nu_* \bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L; G) = G$ . Ici aussi, le résultat est immédiat si  $\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$  est une strate régulière. Supposons donc  $\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$  singulière et appliquons-lui (18) pour obtenir

$$s \leq \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) \leq \nu_* \bar{p}(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}) + s - t.$$

On en déduit  $t \leq \nu_* \bar{p}(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\})$  et le Corollaire 5.4 donne le résultat.

• *Troisième cas.* Supposons  $i < s - \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\})$ . Nous avons d'abord une série d'isomorphismes,

$$\begin{aligned}
 H_i^{\nu_* \bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L \setminus h(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}); G) &\cong_{(1)} H_i^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W \setminus (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}); G) \\
 &\cong H_i^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times (\mathring{c}W \setminus \{\mathbf{w}\}); G) \\
 &\cong H_i^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times ]0, 1[ \times W; G) \\
 &\cong_{(2)} H_i^{\bar{p}}(W; G),
 \end{aligned} \tag{19}$$

où  $\cong_{(1)}$  est l'hypothèse (16) et  $\cong_{(2)}$  le Corollaire 3.9. Notons  $h(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) = B \times \{\mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$ , avec  $B$  fermé. Nous utilisons maintenant le théorème d'excision pour obtenir

une nouvelle série d'isomorphismes,

$$\begin{aligned}
H_i^{\nu_*\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L \setminus h(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}), \mathbb{R}^m \times \mathring{c}L \setminus \mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}; G) &\cong \\
H_i^{\nu_*\bar{p}}((\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L) \setminus (B \times \{\mathbf{v}\}), \mathbb{R}^m \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{v}\}); G) &\cong_{(1)} \\
H_i^{\nu_*\bar{p}}((\mathbb{R}^m \setminus B) \times \mathring{c}L, (\mathbb{R}^m \setminus B) \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{v}\}); G) &\cong \\
H_i^{\nu_*\bar{p}}((\mathbb{R}^m \setminus B) \times (\mathring{c}L, \mathring{c}L \setminus \{\mathbf{v}\}); G) &\cong_{(2)} \\
H_i^{\nu_*\bar{p}}(\mathbb{R}^{k+1} \times A \times (\mathring{c}L, \mathring{c}L \setminus \{\mathbf{v}\}); G) &\cong_{(3)} \\
H_i^{\nu_*\bar{p}}(\mathring{c}L, \mathring{c}L \setminus \{\mathbf{v}\}; G) \oplus H_{i-m+1+k}^{\nu_*\bar{p}}(\mathring{c}L, \mathring{c}L \setminus \{\mathbf{v}\}; G), & \tag{20}
\end{aligned}$$

où  $\cong_{(1)}$  est l'excision de  $B \times (\mathring{c}L \setminus \{\mathbf{v}\})$ ,  $\cong_{(2)}$  provient de (15) et  $\cong_{(3)}$  des Corollaires (4.11) et (3.9). L'hypothèse faite sur  $i$  implique

$$i - m + 1 + k < s - \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) - m + 1 + k = t - \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) + 1.$$

Notons  $S_m$  la source de la strate  $\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$ ; elle vérifie  $\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\} \preceq S_m$  et  $\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\} \sim S_m$ . Comme  $\bar{p}$  est une K-perversité, on obtient, que  $\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}$  soit singulière ou non,

$$0 \leq \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) - \bar{p}(S_m) = \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}) - \nu_*\bar{p}(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}). \tag{21}$$

Il s'ensuit  $i - m + 1 + k \leq t - \nu_*\bar{p}(\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\})$ . Si  $L \neq \emptyset$ , avec le Corollaire 5.3, le deuxième terme de la somme directe (20) est nul. Si  $L = \emptyset$ , alors on a  $t = -1$  et  $i - m + 1 + k < 0$ , donc ce deuxième terme est aussi nul dans ce cas. En conclusion, on a montré,

$$H_i^{\nu_*\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L \setminus h(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\}), \mathbb{R}^m \times \mathring{c}L \setminus \mathbb{R}^m \times \{\mathbf{v}\}; G) \cong H_i^{\nu_*\bar{p}}(\mathring{c}L, \mathring{c}L \setminus \{\mathbf{v}\}; G).$$

Finalement, de cet isomorphisme, de la suite exacte longue d'homologie d'une paire et de (19), on déduit,  $H_i^{\bar{p}}(W; G) \cong H_i^{\nu_*\bar{p}}(\mathring{c}L; G)$  qui entraîne, avec le Corollaire 5.4,

$$H_i^{\nu_*\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L; G) \cong H_i^{\nu_*\bar{p}}(\mathring{c}L; G) \cong H_i^{\bar{p}}(W; G) \cong H_i^{\bar{p}}(\mathring{c}W; G) \cong H_i^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W; G). \quad \square$$

*Démonstration du Théorème B.* — La preuve se réduit à la vérification des hypothèses du Théorème 5.1, lorsque  $\Phi_U: H_*^{\bar{p}}(U; G) \xrightarrow{\cong} H_*^{\nu_*\bar{p}}(U^*; G)$  est la transformation naturelle induite par l'agrégation intrinsèque  $\nu^U: U \rightarrow U^*$ . (Le fait que  $\Phi_\bullet$  soit une transformation naturelle provient des conditions (c) de la Proposition 6.5 et (b) de la Proposition 6.9.) Les conditions (b) et (d) du Théorème 5.1 sont immédiates. L'existence de suites de Mayer Vietoris, requise dans (a), a été démontrée dans la Proposition 4.1. La condition (c) est exactement la Proposition 6.13.  $\square$

Si les K-perversités ne sont pas des perversités image réciproque par l'agrégation intrinsèque, on conserve cependant une invariance topologique entre CS-ensembles obtenus par raffinement d'un même CS-ensemble.

**Proposition 6.14.** — *Soit  $X$  un CS-ensemble muni d'une K-perversité,  $\bar{p}$ , et soit  $X'$  un CS-ensemble, ayant même espace topologique sous-jacent que  $X$  et dont la stratification est plus fine que celle de  $X$ . Si on note  $\bar{p}'$  la perversité induite sur  $X'$ , alors  $\bar{p}'$  est une K-perversité et il existe un isomorphisme,*

$$H_*^{\bar{p}}(X; G) \cong H_*^{\bar{p}'}(X'; G).$$

*Démonstration.* — Notons  $J: X' \rightarrow X$  l'identité qui, dans ce cas, est un morphisme stratifié. Les deux CS-ensembles ont le même CS-ensemble intrinsèque,  $X^*$ , et les deux applications canoniques,  $\nu: X \rightarrow X^*$  et  $\nu': X' \rightarrow X^*$ , vérifient  $\nu'_*\bar{p} = \nu_*J^*\bar{p}$ . Par hypothèse, on a  $\bar{p}' = J^*\bar{p}$ . Si nous supposons avoir démontré que  $\bar{p}'$  est une K-perversité, alors le résultat est une conséquence directe du Théorème B. Il nous reste donc à montrer que  $\bar{p}$  est une K-perversité.

Considérons tout d'abord une strate  $S \in \mathcal{S}_{X'}$  source de la strate  $S^{\nu'}$ . En utilisant que les applications  $\nu'$  et  $J$  sont stratifiées et que  $S$  est une strate source, on a

$$\text{codim } S^{\nu'} \leq \text{codim } S^J \leq \text{codim } S = \text{codim } S^{\nu'}.$$

Il s'ensuit  $\dim S^{\nu'} = \dim S^J$  et la strate  $S^J$  est aussi une strate source de la strate  $S^{\nu'}$ . Détaillons maintenant les conditions imposées dans la Définition 6.7.

- (i) Avec les notations précédentes, cette propriété découle de  $\bar{p}'(S) = \bar{p}(S^J)$ .
- (ii) Considérons deux strates,  $S_0$  et  $S_1$ , de  $X'$  avec  $S_1$  régulière et  $S_0 \sim S_1$ . Nous avons  $S_0^J \sim S_1^J$  car la relation d'équivalence est indépendante de la stratification. D'autre part, la strate  $S_1^J$  est régulière car  $J$  est une application stratifiée. En appliquant la propriété (ii) de la K-perversité  $\bar{p}$ , on obtient  $\bar{p}'(S_0) = \bar{p}(S_0^J) \geq 0$ .
- (iii) Considérons deux strates,  $S_0$  et  $S_1$ , de  $X'$  avec  $S_0 \sim S_1$ ,  $S_0 \preceq S_1$  et  $S_1$  une strate singulière, source de  $S_1^{\nu'}$ . De ce qui précède, on déduit :  $S_0^J \sim S_1^J$ ,  $S_0^J \preceq S_1^J$  et  $S_1^J$  strate singulière, source de  $S_1^{\nu'}$ . En appliquant la propriété (iii) de la K-perversité  $\bar{p}$ , on obtient  $\bar{p}'(S_1) = \bar{p}(S_1^J) \leq \bar{p}(S_0^J) = \bar{p}'(S_0)$ . La deuxième inégalité découle des inégalités suivantes, dans lesquelles on a utilisé le fait que  $S_1$  est une strate source et que l'application  $J$  est stratifiée,

$$\begin{aligned} D\bar{p}'(S_1) &= \text{codim } S_1 - 2 - \bar{p}'(S_1) = \text{codim } S_1^J - 2 - \bar{p}(S_1^J) = D\bar{p}(S_1^J) \leq D\bar{p}(S_0) \\ &\leq \text{codim } S_0^J - 2 - \bar{p}(S_0^J) \leq \text{codim } S_0 - 2 - \bar{p}'(S_0) = D\bar{p}'(S_0). \end{aligned}$$

□

**Remarque 6.15.** — Les propriétés requises dans la Définition 6.7 de K-perversité ont été choisies de façon à être les plus faibles possibles. Elles interviennent comme suit dans la preuve de la Proposition 6.13.

- La condition (i) est nécessaire pour pouvoir définir la perversité  $\nu_*\bar{p}$ .
- La condition (ii) et la première partie de la condition (iii) sont utilisées dans (21) pour une strate  $S_m$  qui est une source.
- La deuxième partie de la condition (iii) est utilisée dans (18) pour une strate singulière qui est aussi une source.

**Remarque 6.16.** — La Proposition 6.14 rejoint le résultat suivant de G. Valette [20, Proposition 3.4]. *Considérons,*

- deux stratifications  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sur un espace  $X$ , telles que l'application identité soit une application stratifiée,  $f: (X, \mathcal{S}') \rightarrow (X, \mathcal{S})$ , entre PL-pseudovariétés,
- deux perversités,  $\bar{p}$  sur  $(X, \mathcal{S})$  et  $\bar{p}'$  sur  $(X, \mathcal{S}')$ , telles que, pour tout couple  $(S, S')$  d'une strate  $S$  de  $\mathcal{S}$  et  $S'$  de  $\mathcal{S}'$  avec  $S' \subset S$ , on ait,

$$\bar{p}(S) \leq \bar{p}'(S') \leq \bar{p}(S) + \text{codim } S' - \text{codim } S. \quad (22)$$

Alors, il existe un isomorphisme,

$$I^{\bar{p}}H_*(X, \mathcal{S}) \cong I^{\bar{p}'}H_*(X, \mathcal{S}').$$

Étudions les interactions entre cet énoncé et le Théorème B.

- a) Si les strates  $S$  et  $S'$  ont même codimension, la condition (22) implique que  $\bar{p}(S) = \bar{p}'(S')$ . Il s'ensuit  $\bar{p}' = f_*\bar{p}$  comme dans la situation que l'on a étudiée.
- b) La condition (22) implique les propriétés (ii) et (iii) de la Définition 6.7.
- c) La preuve de [20] est similaire à celle de la Proposition 6.13. Dans chacune des deux situations, outre les propriétés (ii) et (iii) ci-dessus qui sont communes par hypothèse, la clé est l'existence d'un homéomorphisme d'espaces stratifiés au niveau local,

$$h: (\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W)^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m \times \mathring{c}L. \quad (23)$$

Dans le Théorème B, cet homéomorphisme existe (cf. (14)) car le but choisi pour  $f$  est la stratification intrinsèque  $X^*$ ; dans [20], c'est une conséquence de l'hypothèse PL.

Une question découle alors naturellement de l'analyse précédente : *un homéomorphisme local stratifié comme (23) existe-t-il sans l'hypothèse PL dans l'énoncé de [20, Proposition 3.4] ?*

## 7. Homologie d'intersection modérée. Théorèmes C et D

Dans cette section, nous présentons une version filtrée de l'homologie d'intersection modérée, isomorphe à celle introduite dans [16] (cf. aussi [7]). Nous suivons ici la démarche plus intuitive de [8, 6] où l'on se restreint à des chaînes non incluses dans la partie singulière de  $X$ . Nous développons les propriétés de cette homologie et établissons un théorème d'invariance dans la ligne de celui de la section précédente.

Nous fixons un espace pervers  $(X, \bar{p})$ , filtré par  $X_{-1} = \emptyset \subset X_0 \subset \dots \subset X_n = X$  et de partie singulière  $\Sigma = X_{n-1}$ .

**Remarque 7.1.** — Commençons par une justification heuristique de l'homologie d'intersection modérée. Une perversité  $\bar{p}$  située à gauche de la perversité maximale (i.e.,  $\bar{p} \leq \bar{t}$ ) possède une propriété essentielle, à savoir : *tout simplexe  $\bar{p}$ -admissible,  $\sigma: \Delta \rightarrow X$ , ainsi que son bord, ne peuvent être inclus dans la partie singulière, c'est-à-dire  $\sigma(\partial\Delta) \not\subset \Sigma$* . Évidemment, dans le cas d'une perversité sans contrainte cette particularité disparaît : il existe alors des simplexes admissibles dont le bord est inclus dans la partie singulière. Ces simplexes font que le théorème d'isomorphisme de de Rham et le théorème de dualité ne sont plus vérifiés.

Dans le fil de cette remarque, nous introduisons l'homologie d'intersection modérée avec l'idée de faire disparaître les simplexes admissibles et singuliers.

**Définition 7.2.** — Un simplexe filtré,  $\Delta = \Delta_0 * \dots * \Delta_n$ , est *régulier* si  $\Delta_n \neq \emptyset$  et *singulier* sinon. Le bord d'un simplexe filtré  $\Delta = \Delta_0 * \dots * \Delta_n$  se décompose sous la forme

$$\partial\Delta = \partial_{\text{reg}}\Delta + \partial_{\text{sing}}\Delta,$$

où le premier terme du deuxième membre regroupe les simplexes réguliers et le deuxième les simplexes singuliers. En particulier, on a :

$$\partial_{\text{sing}}\Delta = \begin{cases} \partial\Delta & \text{si } \Delta_n = \emptyset, \\ \Delta_0 * \cdots * \Delta_{n-1} & \text{si } |\Delta_n| = 0, \\ 0 & \text{si } |\Delta_n| > 0. \end{cases}$$

Si  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  est un simplexe régulier, on décompose son bord en  $\partial\sigma = \partial_{\text{reg}}\sigma + \partial_{\text{sing}}\sigma$  comme ci-dessus.

Rappelons que  $(C_*(X; G), \partial)$  dénote le complexe engendré par les simplexes filtrés.

**Définition 7.3.** — Notons  $\mathfrak{C}_*(X; G) = C_*(X; G)/C_*(\Sigma; G)$  le complexe quotient, muni de la différentielle  $\mathfrak{d}$  induite par  $\partial_{\text{reg}}$ . Si  $\rho : C_*(X; G) \rightarrow \mathfrak{C}_*(X; G)$  est la projection canonique, nous avons donc  $\rho \circ \partial = \rho \circ \partial_{\text{reg}} = \mathfrak{d} \circ \rho$ .

Soit  $C_*^{\text{Ad}[\bar{p}]}(X; G) \subset C_*(X; G)$  le sous-groupe engendré par les simplexes  $\bar{p}$ -admissibles et  $\mathfrak{C}_*^{\text{Ad}[\bar{p}]}(X; G) = C_*^{\text{Ad}[\bar{p}]}(X; G)/C_*^{\text{Ad}[\bar{p}]}(\Sigma; G)$  le groupe quotient, appelé groupe des chaînes modérées  $\bar{p}$ -admissibles. Le complexe des chaînes modérées de  $\bar{p}$ -intersection est le sous groupe des chaînes modérées  $\bar{p}$ -admissibles dont la différentielle  $\mathfrak{d}$  est aussi modérée  $\bar{p}$ -admissible. Nous notons  $(\mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G), \mathfrak{d})$  ce complexe et  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G)$  son homologie, appelée  $\bar{p}$ -homologie d'intersection modérée.

Remarquons qu'un élément de  $\mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G)$  possède comme représentant une combinaison linéaire,  $\omega = \sum_i n_i \sigma_i$ , avec  $\text{Im } \sigma_i \not\subset \Sigma$  et  $\sigma_i$   $\bar{p}$ -admissible, telle que  $\partial_{\text{reg}}\omega = \sum_j \tau_j$  où les simplexes  $\tau_j$  sont  $\bar{p}$ -admissibles.

La différence entre homologie d'intersection et homologie d'intersection modérée se manifeste dans les calculs de l'homologie d'un cône, menés dans les Propositions 5.2 et 7.9.

Nous montrons d'abord que l'homologie modérée introduite en 7.3 coïncide avec celle introduite dans [16] et dans [8]. Nous désignons provisoirement cette dernière par  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G)$ . Dans [6], G. Friedman a montré que  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G)$  peut être définie comme dans la démarche précédente en utilisant le complexe des chaînes singulières, que l'on dénote  $C'_*(X; G)$ . Notons  $\mathfrak{C}'_*^{\bar{p}}(X; G)$  le complexe ainsi obtenu.

**Théorème C.** — Soit  $(X, \bar{p})$  un CS-ensemble pervers. L'inclusion canonique  $\mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G) \hookrightarrow \mathfrak{C}'_*^{\bar{p}}(X; G)$  est un morphisme de complexes de chaînes induisant un isomorphisme en homologie,  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G) \cong \mathfrak{H}'_*^{\bar{p}}(X; G)$ .

La preuve de ce résultat suit la même procédure que celle du Théorème A. Nous établissons donc les propriétés requises dans le Théorème 5.1.

**Définition 7.4.** — Soit  $(X, \bar{p})$  un espace pervers. Le sous-espace des  $\bar{p}$ -grandes strates de  $(X, \bar{p})$  est

$$X_{\bar{p}} = \bigcup_{\substack{\bar{p}(S) > \bar{i}(S) \\ S \text{ singulière}}} \bar{S}.$$

**Lemme 7.5.** — *Considérons  $(X, \bar{p})$  un espace pervers, de sous-espace des  $\bar{p}$ -grandes strates noté  $X_{\bar{p}}$ . Soit  $\sigma: \Delta = \Delta_0 * \cdots * \Delta_n \rightarrow X$  un simplexe filtré  $\bar{p}$ -admissible.*

- (a) *Si  $\sigma$  est un simplexe singulier, alors  $\text{Im } \sigma \subset X_{\bar{p}}$ .*
- (b) *Si  $\sigma': \Delta' \rightarrow X$  est une face singulière de codimension 1 de  $\sigma$ , alors  $\text{Im } \sigma' \subset X_{\bar{p}}$ .*
- (c) *Si  $\bar{p} \leq \bar{t}$ , alors  $\sigma$  et ses faces de codimension 1 sont régulières.*

*Démonstration.* — (a) Le simplexe  $\sigma$  étant singulier, on a  $\Delta_n = \emptyset$  et il existe  $i < n$  tel que  $\Delta_i \neq \emptyset$ . On choisit  $i$  le plus grand possible et on pose  $\ell = n - i$ . Soit  $S$  la strate de codimension  $\ell$  telle que  $S \cap \sigma(\Delta) \neq \emptyset$ . Remarquons  $\|\sigma\|_\ell = \dim(\Delta_0 * \cdots * \Delta_{n-\ell}) = \dim \Delta$ , par choix de  $i$  et parce que  $\sigma$  est singulier. La condition d'admissibilité de  $\sigma$  devient donc

$$\|\sigma\|_\ell = \dim \Delta \leq \dim \Delta - \text{codim } S + \bar{p}(S).$$

Il s'ensuit  $\bar{t}(S) < \text{codim } S \leq \bar{p}(S)$  et  $S \subset X_{\bar{p}}$ , d'où le résultat.

La preuve de (b) est similaire et la propriété (c) est une conséquence immédiate.  $\square$

Remarquons, à partir de ce lemme, que

$$(\mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G), \mathfrak{d}) = (\mathfrak{C}_*^{\bar{t}}(X; G), \partial) \quad \text{si } \bar{p} \leq \bar{t}. \quad (24)$$

Le résultat suivant englobe la Proposition 3.6 pour ces perversités.

**Proposition 7.6.** — *Toute application stratifiée,  $f: (X, \bar{p}) \rightarrow (Y, \bar{q})$ , entre deux espaces stratifiés pervers, vérifiant  $f(X_{\bar{p}}) \subset \Sigma_Y$  et  $f^* D\bar{q} \leq D\bar{p}$  induit un morphisme de chaînes,  $f_*: \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow \mathfrak{C}_*^{\bar{q}}(Y; G)$ , défini au niveau des simplexes filtrés par  $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ .*

*Démonstration.* — D'après la Proposition 3.6, l'application  $f$  induit un morphisme de complexes,  $f_*: C^{Ad[\bar{p}]}(X; G) \rightarrow C^{Ad[\bar{q}]}(Y; G)$ . D'autre part, d'après le Lemme 7.5, toute chaîne  $\xi \in C^{Ad[\bar{p}]}(X; G) \cap C_*(\Sigma_X)$  a son support inclus dans  $X_{\bar{p}}$ . Donc, par hypothèse, on a  $f_*(\xi) \subset \Sigma_Y$  et  $f_*(\partial_{\text{sing}} \xi) \subset \Sigma_Y$ .

Le morphisme  $f_*$  passe ainsi au quotient en une application  $f_*: \mathfrak{C}^{Ad[\bar{p}]}(X; G) \rightarrow \mathfrak{C}^{Ad[\bar{q}]}(Y; G)$  vérifiant  $\rho \circ f_* = f_* \circ \rho$  et  $\mathfrak{d} \circ f_* = f_* \circ \mathfrak{d}$ . En conséquence, nous obtenons un morphisme de chaînes induit,  $f_*: \mathfrak{C}^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow \mathfrak{C}^{\bar{q}}(Y; G)$ .  $\square$

Une preuve similaire entraîne que des applications homotopes coïncident en homologie d'intersection modérée.

**Proposition 7.7.** — *Deux applications stratifiées,  $f, g: (X, \bar{p}) \rightarrow (Y, \bar{q})$  entre espaces stratifiés pervers, homotopes par une homotopie stratifiée,  $\varphi$ , qui envoie  $X_{\bar{p}} \times [0, 1]$  dans  $\Sigma_Y$ , et qui vérifie  $\varphi^* D\bar{q} \leq D\bar{p}$ , induisent la même application en homologie,*

$$f_* = g_*: \mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow \mathfrak{H}_*^{\bar{q}}(Y; G).$$

Comme dans la Section 3, on en déduit une propriété essentielle du produit d'un espace pervers par la droite réelle, la preuve découlant directement du fait que les diverses applications intervenant préservent le lieu singulier.

**Corollaire 7.8.** — *Soit  $(X, \bar{p})$  un espace stratifié pervers. Alors, les inclusions  $\iota_z: X \hookrightarrow \mathbb{R} \times X$ ,  $x \mapsto (z, x)$  avec  $z \in \mathbb{R}$  fixé, et la projection  $p_X: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ ,  $(t, x) \mapsto x$ , induisent des isomorphismes,  $\mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(\mathbb{R} \times X; G) \cong \mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(X; G)$ .*

**Proposition 7.9 (Homologie d'intersection modérée d'un cône)**

Soit  $X$  un espace filtré, compact et de dimension formelle  $n$ . Considérons le cône,  $\mathring{c}X$ , muni de la filtration conique et d'une perversité  $\bar{p}$ . Nous notons également  $\bar{p}$  la perversité induite sur  $X$ . Alors, l'homologie d'intersection modérée du cône est déterminée par,

$$\mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G) \cong \begin{cases} \mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(X; G) & \text{si } k < n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}), \\ 0 & \text{si } k \geq n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\}), \end{cases}$$

où l'isomorphisme est induit par n'importe quelle application  $\iota_{\mathring{c}X}: X \rightarrow \mathring{c}X$ ,  $x \mapsto [x, t]$  avec  $t \in ]0, 1[$ .

*Démonstration.* — Nous reprenons les notations de la preuve de la Proposition 5.2. Pour tout  $k < n - \bar{p}(\{\mathbf{w}\})$ , la même démarche donne, avec le corollaire précédent,  $\mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G) = \mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(X \times ]0, 1[; G) \cong \mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(X; G)$ .

Supposons maintenant  $k \geq n - \bar{p}(\mathbf{w})$ . Tout cycle  $\rho(\xi) \in \mathfrak{C}_k^{\bar{p}}(\mathring{c}X; G)$  est l'image par  $\rho$  d'une chaîne  $\xi$ ,  $\bar{p}$ -admissible et dont le bord  $\partial\xi$  est inclus dans l'ensemble singulier  $\Sigma_{\mathring{c}X}$ . Le cône sur ce bord,  $c\partial\xi$ , est également inclus dans  $\Sigma_{\mathring{c}X}$ . Nous avons montré, au début de la preuve de la Proposition 5.2, que la chaîne  $c\xi$  est  $\bar{p}$ -admissible. Le résultat annoncé provient des égalités,

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}\rho(c\xi) &= \rho(\partial c\xi) = \begin{cases} \rho(c\partial\xi) + (-1)^{k+1}\rho(\xi) & \text{si } k \neq 0 \\ \rho(\mathbf{w}) - \rho(\xi) & \text{si } k = 0. \end{cases} = \begin{cases} (-1)^{k+1}\rho(\xi) & \text{si } k \neq 0 \\ -\rho(\xi) & \text{si } k = 0 \end{cases} \\ &= (-1)^{k+1}\rho(\xi). \end{aligned}$$

□

Comme cas particulier de ce résultat, considérons un 0-simplexe  $\bar{p}$ -admissible,  $\xi$ . Si  $\bar{p} > \bar{t}$ , la 1-chaîne associée,  $c\xi$ , est aussi  $\bar{p}$ -admissible. Dans le cas de l'homologie d'intersection, la différentielle est  $\partial c\xi = \mathbf{w} - \xi$ , alors que dans le cas de l'homologie d'intersection modérée on a  $\partial c\xi = -\xi$ . Ceci explique la différence entre  $H_0^{\bar{p}}(X; G) = G$  et  $\mathfrak{H}_0^{\bar{p}}(X; G) = 0$ .

**Proposition 7.10 (Suite de Mayer-Vietoris en homologie d'intersection modérée)**

Pour tout espace pervers,  $(X, \bar{p})$ , et tout recouvrement ouvert,  $\{U, V\}$ , de  $X$ , il existe une suite exacte longue,

$$\dots \rightarrow \mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(U \cap V; G) \rightarrow \mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(U; G) \oplus \mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(V; G) \rightarrow \mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow \mathfrak{H}_{i-1}^{\bar{p}}(U \cap V; G) \rightarrow \dots$$

Le connectant de cette suite exacte longue est donné par  $\delta_h(\xi) = [\mathfrak{d}\xi_U]$ , où  $\xi_U$  s'obtient à partir de l'opérateur de subdivision,  $\mathfrak{s}\mathfrak{d}^k \rho(\xi) \in \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(U) + \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(V)$ , cf. (26).

*Démonstration.* — Considérons la suite exacte courte,

$$0 \rightarrow \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(U \cap V) \rightarrow \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(U) \oplus \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(V) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(U) + \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(V) \rightarrow 0,$$

dans laquelle le morphisme de chaînes,  $\varphi$ , est défini par  $\varphi(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ . La suite exacte longue que l'on cherche est une conséquence directe de la propriété :

$$\text{“l'inclusion } \text{Im } \varphi \hookrightarrow \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X) \text{ induit un isomorphisme en homologie.”} \quad (25)$$

Nous suivons les trois étapes de la démonstration de la Proposition 4.1.



• *Première étape.* Nous avons construit deux opérateurs  $\text{sd} : C_*^{\bar{p}}(X) \rightarrow C_*^{\bar{p}}(X)$  et  $T : C_*^{\bar{p}}(X) \rightarrow C_{*+1}^{\bar{p}}(X)$  vérifiant  $\text{sd} \partial = \partial \text{sd}$  et  $\partial T + T \partial = \text{id} - \text{sd}$ .

Si  $\sigma : \Delta \rightarrow X$  est un simplexe filtré, nous avons montré que la chaîne  $\text{sd}(\sigma)$  se compose de simplexes de la forme  $\sigma \circ \zeta$ , où  $\zeta \in \Delta^{\text{per}}(\Delta)$  est un élément du sous-complexe engendré par les simplexes linéaires de  $\Delta$ . Avec la définition donnée dans *op. cit.* nous avons donc :

$$\text{Im } \sigma \subset \Sigma \iff \text{Im } \sigma \circ \zeta \subset \Sigma,$$

pour chaque  $\zeta$ . Ainsi, l'opérateur  $\text{sd}$  induit un opérateur  $\mathfrak{sd} : \mathfrak{C}_*^{\text{Ad}[\bar{p}]}(X; G) \rightarrow \mathfrak{C}_*^{\text{Ad}[\bar{p}]}(X; G)$ , vérifiant  $\mathfrak{sd} \circ \rho = \rho \circ \text{sd}$  et, par conséquent,  $\mathfrak{d} \mathfrak{sd} = \mathfrak{sd} \mathfrak{d}$ . Ceci implique en particulier que la restriction  $\mathfrak{sd} : \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G)$  est bien définie.

Un argument similaire fournit un opérateur  $\mathfrak{T} : \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow \mathfrak{C}_{*+1}^{\bar{p}}(X; G)$  vérifiant  $\mathfrak{T} \circ \rho = \rho \circ T$  et  $\mathfrak{d} \mathfrak{T} + \mathfrak{T} \mathfrak{d} = \text{id} - \mathfrak{sd}$ .

• *Deuxième étape.* Soit  $\xi \in C_*^{\bar{p}}(X)$ . Dans la démonstration de la Proposition 4.1, nous montrons l'existence d'un entier  $k \geq 0$  que,  $\text{sd}^k \xi \in C_*^{\bar{p}}(U) + C_*^{\bar{p}}(V)$ . Alors, pour tout  $\rho(\xi) \in \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X)$ , il existe  $k \geq 0$  avec

$$\mathfrak{sd}^k \rho(\xi) \in \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(U) + \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(V). \quad (26)$$

• *L'étape finale* est identique à celle de la Proposition 4.1.  $\square$

**Définition 7.11.** — Considérons une paire d'espaces pervers  $(X, U, \bar{p})$ . Le *complexe des chaînes modérées relatives de  $\bar{p}$ -intersection* est le quotient  $\mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X, U; G) = \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G) / \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(U; G)$ . Son homologie est appelée *homologie d'intersection modérée relative, à coefficients dans le groupe abélien  $G$* , et notée  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X, U; G)$ .

Par définition, nous avons une suite exacte longue de la paire  $(X, U, \bar{p})$ ,

$$\dots \rightarrow \mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(U; G) \rightarrow \mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow \mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(X, U; G) \rightarrow \mathfrak{H}_{i-1}^{\bar{p}}(U; G) \rightarrow \dots \quad (27)$$

Les trois corollaires suivants se démontrent exactement comme les corollaires correspondants de la Section 3.

**Corollaire 7.12.** — *Soit  $(X, \bar{p})$  un espace pervers. Si  $F$  est un fermé de  $X$  et  $U$  un ouvert de  $X$  tels que  $F \subset U$ , alors, l'inclusion naturelle  $(X \setminus F, U \setminus F) \hookrightarrow (X, U)$  induit un isomorphisme en homologie,*

$$\mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(X \setminus F, U \setminus F; G) \cong \mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(X, U; G).$$

**Corollaire 7.13.** — *Soit  $(X, \bar{p})$  un espace pervers muni d'un recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$ . Notons  $\mathfrak{C}_*^{\bar{p}, \mathcal{U}}(X)$  le sous-complexe de  $\mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X)$  formé des  $\bar{p}$ -chaînes modérées d'intersection dont le support est inclus dans un des ouverts du recouvrement  $\mathcal{U}$ . Alors, l'inclusion canonique,  $\iota : \mathfrak{C}_*^{\bar{p}, \mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X)$ , induit un isomorphisme en homologie.*

**Corollaire 7.14.** — *Soient  $(X, \bar{p})$  un espace stratifié pervers et  $S^\ell$  la sphère de  $\mathbb{R}^{\ell+1}$ . On munit le produit  $S^\ell \times X$  des filtration et perversité définies dans les Exemples 1.2 et 2.4, la perversité sur le produit étant encore notée  $\bar{p}$ . Alors, la projection  $p_X : S^\ell \times X \rightarrow X$ ,  $(z, x) \mapsto x$ , induit des isomorphismes,  $\mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(S^\ell \times X; G) \cong \mathfrak{H}_k^{\bar{p}}(X; G) \oplus \mathfrak{H}_{k-\ell}^{\bar{p}}(X; G)$ .*

*Démonstration du Théorème C.* — Il suffit de suivre la démarche de la preuve du Théorème A : on vérifie donc les conditions du Théorème 5.1 dans le cas où  $\Phi_U: \mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(U; G) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(U; G)$  est la transformation naturelle induite par l'inclusion canonique,  $\mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(U; G) \hookrightarrow \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(U; G)$ . La suite de Mayer-Vietoris et les calculs locaux de  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}$  se trouvent dans [6]. Les calculs correspondants pour  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}$  ont été établis dans le Corollaire 7.8 et les Propositions 7.9 et 7.10.  $\square$

Déterminons l'homologie d'intersection modérée pour certaines perversités particulières.

**Proposition 7.15.** — *Pour tout espace pervers,  $(X, \bar{p})$ , les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(a)  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G) = H_*^{\bar{p}}(X; G)$ , si  $\bar{p} \leq \bar{t}$ .

(b)  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G) = H_*(X, \Sigma; G)$  si  $\bar{p} > \bar{t}$  et  $(X, \bar{p})$  est un CS-ensemble pervers.

*Démonstration.* — La propriété (a) découle directement de (24).

Nous démontrons (b) à partir du Théorème 5.1. Rappelons que  $C'_*(-; G)$  désigne le complexe des chaînes singulières et remarquons l'existence d'un morphisme de complexes,  $\Phi_X: \mathfrak{C}_*^{\bar{p}}(X; G) \rightarrow C'_*(X, \Sigma; G)$ . Nous en déduisons l'existence d'une transformation naturelle induite, entre homologie d'intersection modérée et homologie singulière relative,

$$\Phi_U: \mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(U; G) \rightarrow H_*(U, \Sigma; G).$$

La preuve se réduit facilement à la vérification du point (c) du Théorème 5.1. Pour cela, on considère un espace pervers compact,  $(L, \bar{p})$ , et il nous faut montrer que la flèche,  $\Phi_{\check{c}L}: \mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(\check{c}L; G) \rightarrow H_*(\check{c}L, \Sigma_{\check{c}L}; G)$ , est un isomorphisme. D'une part, on sait que  $H_*(\check{c}L, \Sigma_{\check{c}L}; G) = 0$ . D'autre part, d'après la Proposition 7.9, nous avons  $\mathfrak{H}_i^{\bar{p}}(\check{c}L; G) = 0$ , car  $n - \bar{p}(\mathbf{w}) \leq n - \bar{t}(\mathbf{w}) - 1 \leq n - (n + 1 - 2) - 1 = 0$ .  $\square$

Soient  $X$  la droite réelle avec la structure de CS-ensemble trivial et  $Y$  le même espace topologique dans lequel on déclare l'origine comme unique singularité. Pour la perversité nulle, nous avons (cf. Corollaire 7.8)  $\mathfrak{H}_*^{\bar{0}}(X; G) = G$  et  $H_*^{\bar{0}}(X; G) = 0$ . L'invariance topologique semble donc perdue quand on travaille avec l'homologie modérée. Dans cet exemple à la base du dysfonctionnement se trouve le fait qu'il existe une strate singulière équivalente à une strate régulière. Nous allons montrer qu'il s'agit en fait de la seule obstruction et que si on évite ce phénomène, on retrouve l'invariance topologique de la Section 6.

**Définition 7.16.** — Un espace stratifié  $X$  est *homogène* s'il ne possède pas de strate singulière équivalente à une strate régulière.

Un espace stratifié pervers  $(X, \bar{p})$  est  *$\bar{p}$ -homogène* si toute strate singulière  $S$  équivalente à une strate régulière vérifie  $\bar{p}(S) \leq \bar{t}(S)$ .

La Définition 6.3 implique que la deuxième définition est équivalente à  $\nu(X_{\bar{p}}) \subset \Sigma_{X^*}$ .

**Théorème D.** — *Soit  $(X, \bar{p})$  un CS-ensemble pervers,  $\bar{p}$ -homogène et dans lequel  $\bar{p}$  est une  $K$ -perversité. Alors, l'agrégation intrinsèque,  $\nu: X \rightarrow X^*$ , induit un isomorphisme,*

$$\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G) \cong \mathfrak{H}_*^{\nu^*\bar{p}}(X^*; G).$$

*Démonstration.* — La démonstration du Théorème B est valable pour ce nouveau résultat sauf en un point qui diffère entre les deux homologies d'intersection, à savoir l'homologie en degré 0 du cône. Celle-ci apparaît dans le deuxième cas de la preuve de la Proposition 6.13. Reprenons-en les notations. On a  $s \leq \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\})$  et le but est de montrer l'égalité  $\mathfrak{H}_0^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W) = \mathfrak{H}_0^{\nu_*\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L)$ .

Notons  $S'$  la strate de  $X$  dont la restriction à  $U \cap S$  est  $S_m$ . Par construction, nous avons,  $S \sim S'$ ,  $S \preceq S'$ ,  $s + 1 = \text{codim } S$ ,  $t + 1 = \text{codim } S'$  et  $t \leq s$ . La condition  $s \leq \bar{p}(\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{w}\})$  implique  $\bar{t}(S) < \bar{p}(S)$ . Donc, avec l'hypothèse de  $\bar{p}$ -homogénéité, la strate  $S'$  est régulière si, et seulement si, la strate  $S$  est régulière. En conséquence, nous avons montré :  $s = -1 \iff t = -1$ . En appliquant la Proposition 7.9 et le Corollaire 7.8, on obtient,

$$\mathfrak{H}_0^{\bar{p}}(\mathbb{R}^k \times \mathring{c}W) = \begin{cases} G & \text{si } t = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} G & \text{si } s = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathfrak{H}_0^{\nu_*\bar{p}}(\mathbb{R}^m \times \mathring{c}L).$$

□

Dans le cas des GM-perversités, ce résultat entraîne l'invariance topologique de l'homologie d'intersection modérée, pour les CS-ensembles homogènes. La preuve est celle du Corollaire 6.10 dans laquelle on remplace le Théorème B par le Théorème D.

**Corollaire 7.17.** — *Soit  $X$  un CS-ensemble homogène et soit  $\bar{p}$  une perversité de King vérifiant  $\bar{p}(1) \geq 0$ . Alors, l'agrégation intrinsèque,  $\nu: X \rightarrow X^*$ , induit un isomorphisme,*

$$\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G) \cong \mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X^*; G).$$

Par conséquent, le groupe  $\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G)$  est indépendant du choix de la stratification de  $X$  comme CS-ensemble homogène. En particulier, si  $X$  et  $X'$  sont deux CS-ensembles homogènes, homéomorphes comme espaces topologiques, ils ont le même CS-ensemble intrinsèque associé et donc la même homologie d'intersection modérée pour une perversité de King,

$$\mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X; G) \cong \mathfrak{H}_*^{\bar{p}}(X'; G).$$

Comme dans la section précédente, on déduit une invariance topologique pour toutes les perversités obtenues par image réciproque d'une perversité définie sur le CS-ensemble intrinsèque.

**Proposition 7.18.** — *Considérons deux CS-ensembles homogènes,  $X_1$  et  $X_2$ , homéomorphes en tant qu'espaces topologiques. Soit  $\bar{p}$  une perversité définie sur le CS-ensemble intrinsèque,  $X^*$ , commun à  $X_1$  et  $X_2$ . Si on munit  $X_1$  et  $X_2$  des perversités images réciproques,  $\bar{p}_1$  et  $\bar{p}_2$ , de  $\bar{p}$  par les agrégations intrinsèques,  $\nu^{X_1}$  et  $\nu^{X_2}$ , alors il existe un isomorphisme*

$$\mathfrak{H}_*^{\bar{p}_1}(X_1; G) \cong \mathfrak{H}_*^{\bar{p}_2}(X_2; G).$$

Dans le cas d'un CS-ensemble homogène  $X_1$  et d'un de ses raffinements  $X_2$ , l'hypothèse d'homogénéité sur  $X_2$  peut-être limitée aux strates de codimension 1. Plus généralement, en prenant en compte l'homogénéité relative à une perversité, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 7.19.** — Soit  $(X_1, \bar{p}_1)$  un CS-ensemble pervers  $\bar{p}_1$ -homogène pour une K-perversité,  $\bar{p}_1$ , et soit  $X_2$  un CS-ensemble ayant même espace topologique sous-jacent que  $X_1$  et dont la stratification est plus fine que celle de  $X_1$ . Supposons qu'il n'existe pas de strate  $S$  dans  $X_2$ , de codimension 1, qui devienne régulière dans  $X_1$ . Alors, si on note  $\bar{p}_2$  la perversité induite par  $\bar{p}_1$  sur  $X_2$ , il existe un isomorphisme

$$\mathfrak{H}_*^{\bar{p}_1}(X_1; G) \cong \mathfrak{H}_*^{\bar{p}_2}(X_2; G).$$

*Démonstration.* — Notons  $J: X_2 \rightarrow X_1$  l'application stratifiée définie par l'identité. Avec la Proposition 6.14, nous savons que  $\bar{p}_2$  est une K-perversité et il nous suffit donc de montrer que  $X_2$  est  $\bar{p}_2$ -homogène. Prenons pour cela une strate singulière  $S$  de  $X_2$ , équivalente à une strate régulière  $R$  de  $X_2$  et prouvons  $\bar{p}_2(S) \leq \bar{t}(S)$ . Par hypothèse, on peut supposer que  $S$  est de codimension 2. Dans la preuve de la Proposition 6.14, nous avons montré  $S^J \sim R^J$ . Distinguons maintenant les cas suivants.

- Si la strate  $S^J$  est singulière, en utilisant la  $\bar{p}_1$ -homogénéité de  $X_1$  et le fait que  $J$  est stratifiée, on peut écrire :

$$\bar{p}_2(S) = \bar{p}_1(S^J) \leq \bar{t}(S^J) = \text{codim } S^J - 2 \leq \text{codim } S - 2 = \bar{t}(S).$$

- Si la strate  $S^J$  est régulière, de  $\text{codim } S \geq 2$ , nous avons

$$\bar{p}_2(S) = \bar{p}_1(S^J) = 0 \leq \text{codim } S - 2 = \bar{t}(S).$$

- Si les strates  $S^J$  et  $S$  sont régulières, alors  $\bar{p}_2(S) = 0 = \bar{t}(S)$ .

□

## Références

- [1] J.-L. BRYLINSKI – « Equivariant intersection cohomology », Kazhdan-Lusztig theory and related topics (Chicago, IL, 1989), Contemp. Math., vol. 139, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, p. 5–32.
- [2] S. E. CAPPELL & J. L. SHANESON – « Singular spaces, characteristic classes, and intersection homology », *Ann. of Math. (2)* **134** (1991), no. 2, p. 325–374.
- [3] D. CHATAUR, M. SARALEGI-ARANGUREN & D. TANRÉ – « Steenrod squares on Intersection cohomology and a conjecture of M. Goresky and W. Pardon », *ArXiv Mathematics e-prints* (2013), À paraître dans *Algebr. Geom. Topol.*
- [4] ———, « Intersection Cohomology. Simplicial blow-up and rational homotopy. », *ArXiv Mathematics e-prints* (2012), À paraître dans *Mem. Amer. Math. Soc.*
- [5] ———, « Dualité de Poincaré et homologie d'intersection », Preprint, 2016.
- [6] G. FRIEDMAN – « Singular intersection homology », Preprint, 2014.
- [7] ———, « Singular chain intersection homology for traditional and super-perversities », *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 5, p. 1977–2019 (electronic).
- [8] G. FRIEDMAN & J. E. MCCLURE – « Cup and cap products in intersection (co)homology. », *Adv. Math.* **240** (2013), p. 383–426 (English).
- [9] M. GORESKY & R. MACPHERSON – « Intersection homology theory », *Topology* **19** (1980), no. 2, p. 135–162.
- [10] ———, « Intersection homology. II », *Invent. Math.* **72** (1983), no. 1, p. 77–129.

- [11] H. C. KING – « Topological invariance of intersection homology without sheaves », *Topology Appl.* **20** (1985), no. 2, p. 149–160.
- [12] R. MACPHERSON – « Intersection homology and perverse sheaves », Unpublished AMS Colloquium Lectures, San Francisco, 1991.
- [13] G. PADILLA – « Intersection cohomology of stratified circle actions », *Illinois J. Math.* **49** (2005), no. 2, p. 659–685 (electronic).
- [14] G. PADILLA & M. SARALEGI-ARANGUREN – « Intersection cohomology of the circle actions », *Topology Appl.* **154** (2007), no. 15, p. 2764–2770.
- [15] J. I. ROYO PRIETO & M. E. SARALEGI-ARANGUREN – « Equivariant intersection cohomology of the circle actions », *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM* **108** (2014), no. 1, p. 49–62.
- [16] M. SARALEGI-ARANGUREN – « de Rham intersection cohomology for general perversities », *Illinois J. Math.* **49** (2005), no. 3, p. 737–758 (electronic).
- [17] L. C. SIEBENMANN – « Deformation of homeomorphisms on stratified sets. I, II », *Comment. Math. Helv.* **47** (1972), p. 123–136; *ibid.* **47** (1972), 137–163.
- [18] Y. SMIRNOV – « A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space », *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **77** (1951), p. 197–200.
- [19] E. H. SPANIER – *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [20] G. VALETTE – « A Lefschetz duality for intersection homology », *Geom. Dedicata* **169** (2014), p. 283–299.

---

10 février 2016

DAVID CHATAUR, Lafma, Université de Picardie Jules Verne, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens Cedex 1, France • *E-mail* : [David.Chataur@picardie.fr](mailto:David.Chataur@picardie.fr)

MARTINTXO SARALEGI-ARANGUREN, Laboratoire de Mathématiques de Lens EA 2462, Fédération CNRS Nord-Pas-de-Calais FR2956, Université d’Artois, 62307 Lens Cedex, France  
*E-mail* : [martin.saraleguiaranguren@univ-artois.fr](mailto:martin.saraleguiaranguren@univ-artois.fr)

DANIEL TANRÉ, Département de Mathématiques, UMR 8524, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d’Ascq Cedex, France • *E-mail* : [Daniel.Tanre@univ-lille1.fr](mailto:Daniel.Tanre@univ-lille1.fr)